УДК 51
ББК 22.11
В 93

Авторы-составители: Л. А. Воробей, канд. физ.-мат. наук, доцент;
Н. С. Косенок, канд. физ.-мат. наук, доцент;
С. В. Кравченко, канд. физ.-мат. наук;
Е. В. Легчекова, канд. физ.-мат. наук

Рецензенты: О. В. Титов, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры естественных наук Гомельского инженерного института МЧС Республики Беларусь;
М. А. Грибовская, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 2 от 8 декабря 2015 г.

В 93 **Высшая** математика : пособие для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени / авт.-сост. : Л. А. Воробей [и др.]. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2016. – 172 с.
ISBN 978-985-540-344-0

Издание предназначено для студентов экономических специальностей. Приводятся краткие теоретические сведения по темам дисциплины «Высшая математика», задачи для самостоятельного решения, а также методические указания по решению типовых задач.

УДК 51
ББК 22.11

ISBN 978-985-540-344-0

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Знание математики необходимо студентам экономических вузов при изучении фундаментальных и специальных экономических дисциплин. Теория вероятностей и математическая статистика позволяют освоить методы изучения, обобщения и прогнозирования экономической информации.

В данном пособии приводятся основные теоретические сведения по разделу курса «Теория вероятностей и математическая статистика», задачи для самостоятельного решения, которые позволят закрепить изученный материал, а также методические указания по решению типовых задач.

Список рекомендуемой литературы включает наименования основных литературных источников, которые предлагается использовать при изучении курса.

Предлагаемое издание адресовано преподавателям, студентам дневной формы получения высшего образования для проведения практических занятий и организации самостоятельной учебной работы. Кроме того, данное пособие может быть полезно студентам заочной формы получения образования при самостоятельной подготовке к тестированию и экзамену.

Тема 1. СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Классификация событий

Опытом, или *испытанием*, в теории вероятностей называется всякое осуществление определенной совокупности условий или действий, при которых происходит соответствующее явление.

Возможный результат опыта называется *событием*. Например, опытом является подбрасывание монеты, а событиями – «герб на верхней ее стороне», «цифра на верхней ее стороне». Обозначаются события большими буквами латинского алфавита A, B, C и т. д.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет при данном испытании. Например, если в ящике находятся только голубые шары, то событие «из ящика извлечен голубой шар» является достоверным.

Невозможным называется событие, которое не произойдет при данном испытании. Так, если в ящике находятся только красные шары, то событие «из ящика извлечен голубой шар» является невозможным.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти при данном испытании. Например, если в ящике находятся голубые и красные шары, одинаковые по размеру и весу, то событие «из ящика извлечен голубой шар» является случайным.

Совместные события – это события, для которых наступление одного из них не исключает появление других в данном испытании. Так, при подбрасывании двух монет события «герб на верхней стороне» и «цифра на верхней стороне» являются совместными.

Несовместные события – это события, которые не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Например, несовместными являются попадание и промах при одном выстреле.

Равновозможные события – это события, для которых ни одно не является более возможным, чем другие в данном испытании.

Два события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие, противоположное A, обозначают как $\overline{A}$.

События A_1, A_2, …, A_n называют *полной группой событий*, если они попарно несовместные. Появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Элементарным исходом, или *шансом*, называется каждое событие, которое может произойти в итоге опыта. Например, при подбрасывании игрального кубика элементарными исходами являются события «на верхней грани 1», «на верхней грани 2», …, «на верхней грани 6».

Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называются *благоприятствующими этому событию*. Так, при подбрасывании игрального кубика элементарные исходы «на верхней грани 2», «на верхней грани 4», «на верхней грани 6» являются благоприятствующими событию «выпало четное число очков».

1.2. Классическое определение вероятности

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных исходов опыта, в котором может появиться это событие. Вероятность события A обозначают как $P(A)$ и определяют по формуле

$$\text{Đ}(\grave{A}) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

n – число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий.

Вероятность события $P(A)$ – численная мера, характеризующая степень возможности появления события A в данном испытании.

Вероятность достоверного события равна единице. Вероятность невозможного события равна нулю. Вероятность случайного события больше нуля и меньше единицы.

Вероятность любого события A удовлетворяет неравенству

$$0 \le \text{Đ}(\grave{A}) \le 1. \tag{2}$$

Пример 1.1. В урне находится 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 шара красного цвета и 6 – голубого. Из урны извлекается 1 шар. Определите, какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым.

Решение

Обозначим через *А* событие «извлеченный шар окажется голубым». Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию *А*. Следовательно,

$$Đ(\grave{A}) = \frac{6}{10} = 0{,}6\,.$$

Пример 1.2. Из 15 билетов наудачу берется один. Определите, какова вероятность того, что номер билета есть число, не делящееся ни на 3, ни на 5.

Решение

Обозначим через *А* событие «номер взятого билета не делится ни на 3, ни на 5».

Всего элементарных исходов (n) 15. Событию *А* благоприятствуют исходы 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 (m = 8). Используя формулу (1), получим:

$$Đ(\grave{A}) = \frac{m}{n} = \frac{8}{15}\,.$$

Числа m и n находят путем прямого перечисления элементарных исходов испытания. Однако при большом числе элементарных исходов их перечисление весьма громоздко. Поэтому при подсчете числа элементарных исходов используют *элементы комбинаторики*, рассматривающей различные соединения.

Соединениями называют различные группы, составленные из каких-либо объектов, элементов. Различают три вида соединений: перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками из n элементов называют соединения, содержащие все n элементов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов. Число перестановок из n элементов находят по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \; (0! = 1). \qquad (3)$$

Например, $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Размещениями называют множества, составленные из n элементов по k ($n \geq k$), которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k $\left(A_n^k\right)$ находят по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \tag{4}$$

Например, $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5\cdot4\cdot3 = 60$.

Сочетаниями из n элементов по k ($n \geq k$) называют соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга, по крайней мере, одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k $\left(C_n^k\right)$ находят по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}\,, \tag{5}$$

или

$$\tilde{N}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,. \tag{6}$$

Например, $\tilde{N}_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot4}{2} = 10$.

Для C_n^k полезно использовать следующее свойство сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k}\,. \tag{7}$$

Число различных перестановок из n элементов, среди которых k_1 первого вида, k_2 – второго, …, k_m – m-го вида, определяется по формуле

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}\,. \tag{8}$$

Число различных размещений по k элементов из n различных элементов, в которых каждый элемент может использоваться любое от 0 до k число раз, находят по формуле

$$\overline{A_n^k} = n^k\,. \tag{9}$$

Число различных сочетаний по k элементов из n различных элементов, в которых каждый элемент может повторяться любое от 0 до k число раз, определяют по формуле

$$f_n^k = C_{n+k-1}^k. \qquad (10)$$

Пример 1.3. Укажите, сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 детей.

Решение

Согласно формуле (3) при $n = 5$ находим:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 1.4. В студенческой группе, состоящей из 30 человек, нужно выбрать старосту, его заместителя и профорга – актив группы. Определите, сколькими способами это можно сделать.

Решение

Из множества 30 собравшихся человек нас интересуют размещения из 30 по 3. Используя формулу (4), получим:

$$\grave{A}_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360.$$

Пример 1.5. Собранию из 30 человек надо выбрать трех делегатов на конференцию. Укажите, сколькими способами это можно сделать.

Решение

Из множества в 30 человек надо выбрать подмножество в 3 человека. Это можно сделать в соответствии с формулой (5):

$$\tilde{N}_{30}^3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4\,060.$$

Пример 1.6. Наудачу взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Найдите вероятность того, что в нем все цифры будут различны.

Решение

Так как на каждом из пяти мест в пятизначном номере может стоять любая из цифр (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), то всех пятизначных чисел будет 10^5. Номера, у которых все цифры различные, это размещения из 10 элементов по 5, поэтому число благоприятствующих исходов – $\grave{A}_{10}^{5}$. Искомая вероятность будет следующей:

$$Ð(\grave{A}) = \frac{\grave{A}_{10}^{5}}{10^{5}}.$$

Пример 1.7. На пяти одинаковых карточках написаны буквы «л», «м», «о», «о», «т». Определите, какова вероятность того, что:

а) извлекая все карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово «молот»;

б) извлекая 3 карточки по одной наугад, получим в порядке выхода слово «том».

Решение

Пронумеруем буквы в том порядке, в котором они написаны (таблица 1).

Таблица 1 – **Номера букв**

Буква	л	м	о	о	т
Номер	1	2	3	4	5

Из пяти различных букв можно составить следующее число перестановок: $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Значит, общее число равновозможных исходов (n) – 120.

Событие A «получится слово «молот» произойдет, если карточки будут взяты в порядке, как показано в таблице 2.

Таблица 2 – **Варианты извлечения карточек в первом случае**

Вариант 1	2	3	1	4	5	Вариант 2	2	4	1	3	5
Буква	м	о	л	о	т	Буква	м	о	л	о	т

Следовательно, благоприятствующих исходов (m) – 2. Тогда получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}.$$

Во втором случае общее число исходов $n = A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$ Слово «том» появится, если карточки будут взяты в таком порядке, как показано в таблице 3.

Таблица 3 – **Варианты извлечения карточек во втором случае**

Вариант 1	5	3	2	Вариант 2	5	4	2
Буква	т	о	м	Буква	т	о	м

Благоприятствующих исходов событию B – «получено слово «том» будет 2, т. е. $m = 2$.

Следовательно, $P(B) = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$.

Пример 1.8. Из колоды в 36 карт наугад вынимаются 3 карты. Найдите вероятность того, что среди них окажутся 2 туза.

Решение

Событие A – «среди трех карт два туза».

Общее число возможных исходов $n = C_{36}^3$. Определим число исходов, благоприятствующих событию A. Два туза из четырех можно взять C_4^2 способами. Еще одну любую карту можно взять C_{32}^1 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов будет следующим: $m = C_4^2 \cdot C_{32}^1$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{32!}{31!} \cdot \frac{3!33!}{36!} = \frac{16}{35 \cdot 17} \approx 0{,}0\,269.$$

1.3. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. Однако во многих случаях трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы равновозможны. Поэтому используют статистическое определение вероятности. Поясним его.

Относительная частота $W(A)$ *события* A есть отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}, \tag{11}$$

где n – общее число произведенных испытаний;
m – число появлений события A.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

Это определение вероятности называется *статистическим*.

Пример 1.9. Частота нормального всхода семян равна 0,97. Из высеянных семян взошло 970. Определите, сколько семян было высеяно.

Решение

Из формулы (11) $n = \frac{m}{W}$. Так как m = 970, W = 0,97, то $n = \frac{970}{0,97} = 1\,000.$

Итак, было высеяно 1 000 семян.

Пример 1.10. В партии из 1 000 изделий товаровед обнаружил 15 бракованных. Найдите относительную частоту появления брака.

Решение

Так как m = 15, n = 1 000, то $W(A) = \frac{15}{1000} = 0,015.$

1.4. Геометрическое определение вероятности

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрическую вероятность* – вероятность попадания точки в область.

Пусть каждый элементарный исход испытания можно рассматривать как попадание в точку некоторой области меры S. В области меры S содержится область меры S_A. Событие A – «попадание в точку области S_A».

Тогда вероятность события A определяется по формуле

$$P(A)=\frac{S_A}{S}. \tag{12}$$

Пример 1.11. Капсула с космонавтами должна приземлиться в круг с радиусом 2 км. Вероятность приземления в любое место круга одинаковая. Найдите вероятность приземления космонавтов:

а) от центра круга на расстоянии меньше 1 км;

б) в заданном секторе, составляющем 0,1 площади этого круга.

Решение

Область C_1 – круг с радиусом 2 км. Площадь этого круга (S) равна 4π. Область C_2 – круг с радиусом 1 км и площадью $S_1=\pi$.

Событие A – «приземление в область C_2». Тогда

$$P(A)=\frac{S_1}{S}=\frac{\pi}{4\pi}=0{,}25.$$

Событие B – «приземление в сектор, площадь которого $S_2 = 0{,}1S$». Поэтому $P(B)=\frac{S_2}{S}=\frac{0{,}1S}{S}=0{,}1.$

Пример 1.12. Велосипедист прибудет в город C точно в течение суток. Вероятность прибытия в любой момент одинакова. Найдите вероятность того, что он прибудет в течение данного часа.

Решение

Обозначим через A событие «велосипедист прибудет в город в течение данного часа».

Областью S является промежуток 24 ч, а $S_A = 1$ ч. Поэтому $P(A)=\frac{1}{24}.$

1.5. Вероятности суммы и произведения событий

Суммой (*объединением*) *нескольких событий* A_1, A_2, …, A_n называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий:

$$C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n. \tag{13}$$

Произведением (*пересечением*) *нескольких событий* A_1, A_2, …, A_n называется событие C, состоящее в совместном появлении всех этих событий:

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n. \tag{14}$$

Пример 1.13. Из ящика, в котором находятся изделия двух сортов, извлекаются детали. Обозначим через A событие «извлечена деталь первого сорта», через B – «извлечена деталь второго сорта». Объясните, что представляют собой события $A + B$ и $A \cdot B$.

Решение

$A + B$ – это событие, которое происходит при наступлении хотя бы одного из событий A и B. Следовательно, $A + B$ в данном случае – деталь первого или второго сорта.

$A \cdot B$ – невозможное событие, так как деталь одновременно не может быть и первого, и второго сорта.

Вероятность суммы n *несовместных событий* A_1, A_2, …, A_n равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{15}$$

Сумма вероятностей событий A_1, A_2, …, A_n, *образующих полную группу*, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{16}$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{17}$$

Если обозначить $P(A) = p$, а $P(\overline{A}) = q$, то

$$p + q = 1. \tag{18}$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{19}$$

Для *трех совместных событий вероятность их суммы* будет следующей:

$$\begin{gathered} P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)- \\ -P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \end{gathered} \tag{20}$$

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из событий не зависит от того, появилось или не появилось другое событие.

События A_1, A_2, …, A_n называются *независимыми в совокупности* или *независимыми*, если они попарно независимы, а также независимы каждое из них и любая комбинация, составленная из остальных (части или всех) событий.

Пусть события A_1, A_2, …, A_n независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, …, $P(A_n) = p_n$, и в результате испытания могут наступить все события либо часть из них, либо одно из них. Тогда вероятность появления хотя бы одного из них определяется по формуле

$$\begin{gathered} P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n})= \\ =1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n. \end{gathered} \tag{21}$$

При этом $P(\overline{A_k})=1-P(A_k)=q_k$, где $k=\overline{1,n}$.

Если все события имеют одинаковую вероятность, равную p, то

$$P(A) = 1 - q^n, \tag{22}$$

где $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Если *события A_1, A_2, …, A_n независимы, то вероятность их произведения* равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{23}$$

Два события называются *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или ненаступления другого события.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность произведения зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило, т. е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{24}$$

Формула умножения вероятностей может быть распространена на любое число n зависимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n). \tag{25}$$

Причем, вероятность последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие произошли.

Пример 1.14. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй – 0,3. Определите вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор.

Решение

Событие A – «попадание в первый сектор», событие B – «попадание во второй сектор». Данные события несовместны, так как попадание в один сектор исключает попадание в другой.

Событие C – «попадание либо в первый, либо во второй сектор», т. е. $C = A + B$. Используя формулу (15), получаем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Пример 1.15. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена равна 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найдите вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен.

Решение

Обозначим события: A – «попадание первого спортсмена», B – «попадание второго спортсмена», C – «попадание хотя бы одного из спортсменов». Очевидно, $A + B = C$, причем события A и B совместны. Используя формулу (19), получаем:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Поскольку A и B – независимые события, то для них верна формула (19). Подставив значения $P(A)$ и $P(B)$ в данную формулу, найдем искомую вероятность:

$$P(C) = 0{,}85 + 0{,}8 - 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}97.$$

Пример 1.16. В течение года две фирмы независимо друг от друга могут обанкротиться с вероятностями 0,06 и 0,09. Определите вероятность того, что обанкротятся обе фирмы.

Решение

Введем обозначения событий: A – «обе фирмы обанкротятся», A_1 – «в течение года первая фирма обанкротится», A_2 – «в течение года вторая фирма обанкротится». Событие A возможно при одновременном появлении событий A_1 и A_2, поэтому $A = A_1 \cdot A_2$. Надо найти $P(A)$.Так как события A_1 и A_2 независимы, то по формуле (23) получаем:

$$P(A) = 0{,}06 \cdot 0{,}09 = 0{,}0\,054.$$

Пример 1.17. В коробке находятся 4 белых, 3 синих и 2 черных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Найдите вероятность того, что первый шар будет белым, второй – синим, третий – черным.

Решение

Пусть событие A_1 – «первым вытащили белый шар», событие A_2 – «вторым вытащили синий шар», событие A_3 – «третьим вытащили черный шар». Тогда интересующее нас событие $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. События являются зависимыми. Согласно формуле (25) имеем:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3).$$

Находим, что $P(A_1)=\frac{4}{9}$; $P_{A_1}(A_2)=\frac{3}{8}$, так как шаров осталось 8, а число благоприятных случаев для события A_2 равно 3; $P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{2}{7}$, так как уже 2 шара (белый и синий) вытащены.

Следовательно, $P(A)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$.

Пример 1.18. Для сигнализации об аварии установлено 2 независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 – для второго. Найдите вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Решение

Пусть событие A_1 – «сработает первый сигнализатор», событие A_2 – «сработает второй сигнализатор», событие A – «сработает только один сигнализатор». Тогда

$$A=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2.$$

Слагаемые в правой части этого равенства попарно несовместны. По формуле (15) имеем:

$$P(A)=P(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2).$$

События A_1, A_2 независимы. Согласно формулам (23) и (17) находим:

$$P(A)=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2)=0{,}95\cdot(1-0{,}9)+(1-0{,}95)\cdot 0{,}9=$$

$$=0{,}95\cdot 0{,}1+0{,}05\cdot 0{,}9=0{,}14.$$

Пример 1.19. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

Решение

Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах (событие A) равна: $P(A) = 1 - q^3$, где q – вероятность промаха.

По условию $P(A) = 0{,}875$. Следовательно, $0{,}875 = 1 - q^3$. Отсюда $q^3 = 1 - 0{,}875 = 0{,}125$; $q = 0{,}5$.

Находим искомую вероятность: $p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

1.6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть некоторое событие A может произойти при условии, что появится одно из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу событий.

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A). \tag{26}$$

Это равенство называют *формулой полной вероятности*, где $P_{B_i}(A)$ – вероятность наступления события A при наступлении гипотезы B_i.

Пусть событие A произошло. То, что событие A произошло, изменит вероятности гипотез B_1, B_2, …, B_n, и условная вероятность гипотезы $P_A(B_k)$ в предположении, что событие A произошло, определится по *формуле Байеса*:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}, \tag{27}$$

где $k = \overline{1, n}$.

Пример 1.20. В урне находится 10 шаров, из них – 4 белых. Один шар укатился, цвет его неизвестен. Из урны наугад вынимают 1 шар. Вычислите вероятность того, что он будет белым.

Решение

Обозначим через A событие «вынутый шар белый». Возможны следующие предположения (гипотезы) о цвете укатившегося шара: B_1 – «утерянный шар белый», B_2 – «утерянный шар не белый». Тогда

$$P(B_1) = \frac{4}{10};\ P(B_2) = \frac{6}{10}.$$

Вероятность вынуть белый шар при условии, что укатился белый, равна: $P_{B_1}(A) = \frac{3}{9}$.

Вероятность вынуть белый шар при условии, что укатился не белый, будет следующей: $P_{B_2}(A) = \frac{4}{9}$.

Получаем искомую вероятность:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}.$$

Пример 1.21. Банк разместил свои кредитные ресурсы следующим образом: 10% – кредиты государственным органам, 30% – кредиты другим банкам, 60% – кредиты физическим лицам. Вероятность невозврата кредита соответственно равна 0,01, 0,05 и 0,2. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но факс плохо пропечатал данные клиента. Найдите вероятность, что это был другой банк.

Решение

Пусть событие A – «произойдет невозврат кредита». Обозначим гипотезы: B_1 – «кредит взят государственными органами», B_2 – «кредит другому банку», B_3 – «кредит физическому лицу». Тогда

$$P(B_1) = \frac{10\%}{100\%} = 0{,}1;\ \ P(B_2) = \frac{30\%}{100\%} = 0{,}3;\ \ P(B_3) = \frac{60\%}{100\%} = 0{,}6;$$

$$P_{B_1}(A) = 0{,}01;\ \ P_{B_2}(A) = 0{,}05;\ \ P_{B_3}(A) = 0{,}2.$$

По формуле (26) получаем:

$$P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}136.$$

Чтобы найти искомую вероятность, надо вычислить $P_A(B_2)$. Для этого воспользуемся формулой Байеса:

$$P_A(B_2) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}136} = 0{,}11.$$

1.7. Повторные независимые испытания

На практике приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний, в результате каждого из которых может появиться или не появиться событие A. При этом представляет интерес исход не каждого отдельного испытания, а вообще число появления события A в результате определенного количества испытаний.

Вероятность, что при n испытаниях событие A появится ровно k раз, обозначается как $P_n(k)$.

Вероятность появления события A не менее k_1 и не более k_2 раз при n испытаниях отражается как $P_n(k_1; k_2)$.

Испытания называются *независимыми относительно события A*, если вероятность события A в каждом испытании постоянна и не зависит от исходов других испытаний.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \tag{28}$$

где $q = 1 - p$.

Эта формула называется *формулой Бернулли*.

Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит менее k раз; более k раз; не менее k раз; не более k раз; хотя бы один раз, находят соответственно по формулам

$$P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1); \tag{29}$$

$$P(A) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n); \tag{30}$$

$$P(A) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n); \qquad (31)$$

$$P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k); \qquad (32)$$

$$P(A) = 1 - P_n(0). \qquad (33)$$

Напомним, что сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(n) = 1. \qquad (34)$$

Пример 1.22. Монету бросают 5 раз. Найдите вероятность того, что герб выпал 2 раза; герб выпал более одного раза.

Решение

Обозначим через A «выпадение герба при отдельном испытании». Тогда $p = \dfrac{1}{2}$; $q = \dfrac{1}{2}$.

По формуле Бернулли находим вероятность того, что герб выпал 2 раза:

$$P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

Определим вероятность во втором случае:

$$P_5(k > 1) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 1 - \left(P_5(0) + P_5(1)\right) =$$

$$= 1 - C_5^0 p^0 q^5 - C_5^1 p q^4 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} = 0{,}8125.$$

Пример 1.23. На фабрике 70% изделий – продукция высшего сорта. Покупатель приобрел 5 изделий, изготовленных на фабрике. Вычислите вероятность того, что 2 из них изделия высшего сорта.

Решение

Обозначим через событие A «приобретено изделие высшего сорта». Тогда $p = 0{,}7$; $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Вероятность того, что из пяти изделий 2 будет высшего сорта, равна:

$$P_5(2) = C_5^2 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3 = 10 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 0{,}1323.$$

Если вероятность p наступления события в каждом испытании постоянна и близка к нулю, а число независимых испытаний n достаточно велико и произведение $np = \lambda$ постоянно, то вероятность $P_n(k)$ определяется по *формуле Пуассона*:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \,. \tag{35}$$

Пример 1.24. В банк поступило 1 000 стодолларовых купюр. Определите, какова вероятность того, что среди этих купюр окажется 5 фальшивых, если 0,1% купюр фальшивые.

Решение

Из условия имеем: $n = 1\,000$, $k = 5$, $p = 0{,}001$.

Так как число n велико, а число p мало, воспользуемся формулой Пуассона. Получаем:

$$\lambda = np = 1\,000 \cdot 0{,}001 = 1;$$

$$P_{1000}(5) \approx \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} = \frac{1}{120 \cdot e} \approx 0{,}0\,031.$$

Вычисление $P_n(k)$ по формуле Бернулли при больших n и k связано с арифметическими трудностями, поэтому при $n > 50$ пользуются *приближенной формулой Муавра-Лапласа* (*локальная теорема Лапласа*):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \,, \tag{36}$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ при $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения p, q имеют тот же смысл, что и в формуле Бернулли, а $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Значения функции $\varphi(x)$ даны в приложении А.

Пример 1.25. Игральную кость бросают 800 раз. Вычислите вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет 267 раз.

Решение

Вероятность выпадения числа очков, кратного трем, равна $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. По формуле (36) находим:

$$P_{800}(267) = \frac{1}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \cdot \varphi(x); \;\; x = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = 0{,}025.$$

По таблице находим, что значение $\varphi(0{,}025) = 0{,}3\,989$. Тогда $P_{800}(267) = 0{,}03$.

Если вероятность наступления события A в каждом из независимых испытаний постоянна и $0 < p < 1$, то вероятность того, что в n испытаниях событие произойдет от k_1 до k_2 (при достаточно большом n) можно приближенно найти по *интегральной формуле Муавра-Лапласа* (*интегральная теорема Лапласа*):

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{37}$$

где $\hat{O}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа;

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ существует при любом действительном значении x и обладает следующими *свойствами*:

1) Функция Лапласа – нечетная функция, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2) При возрастании x от 0 до 5 $\Phi(x)$ возрастает от 0 до 0,5. Для $x > 5$ $\hat{O}(\tilde{o}) \cong 0{,}5$.

Таблица значений $\Phi(x)$ для $x \in (0; 5)$ предлагается в приложении Б.

Пример 1.26. На оптовую базу поступает в среднем 70% продукции высшего сорта. Определите вероятность того, что в партии из 1 000 изделий, проверенных товароведом, число изделий высшего сорта заключено между 652 и 760.

Решение

Событие A – «появление изделия высшего сорта», $p = 0{,}7$ – вероятность наступления события в отдельном испытании. Найдем $P_{1\,000}(652; 760) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

Расчет осуществим следующим образом:

$$np = 0{,}7 \cdot 1\,000 = 700; \; npq = 700 \cdot 0{,}3 = 210;$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{210} = 14{,}491;$$

$$x_1 = \frac{652 - 700}{14{,}491} = -3{,}31; \quad x_2 = \frac{760 - 700}{14{,}491} = 4{,}14.$$

По таблицам находим значения функции:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-3{,}31) = -0{,}4\,991; \; \Phi(x_2) = \Phi(4{,}14) = 0{,}4\,999.$$

Искомая вероятность $P_{1\,000}(652; 760) = 0{,}4\,999 + 0{,}4\,991 = 0{,}999$.

Число наступлений события в независимых испытаниях называется *наивероятнейшим*, если вероятность наступления события данное число раз в этой серии испытаний наибольшая по сравнению с вероятностями других исходов.

Наивероятнейшее число события удовлетворяет неравенству $np - q \le k_0 \le np + p$, где n – число испытаний, p – вероятность наступления события A в отдельном испытании, $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие A не произойдет.

Пример 1.27. Игральную кость бросают 100 раз. Найдите наибольшее вероятное число опытов, в которых число выпавших очков будет кратное трем.

Решение

Так как $n = 100$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, то искомое наивероятнейшее число удовлетворяет неравенствам

$$100\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \le k_0 \le 100\frac{1}{3} + \frac{1}{3};$$

$$32{,}3 \le k_0 \le 33{,}6.$$

Отсюда следует, что $k_0 \cong 33$.

Тема 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания из множества возможных значений принимает одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случая.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z, …, а их значения – строчными буквами с индексами, например, x_1, x_2, x_3 и т. д.

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретной (*прерывной*) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины конечно или бесконечно.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Дискретная случайная величина считается заданной, если известны все возможные ее значения и их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих вероятностей.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит все возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i (таблица 4).

Таблица 4 – **Закон распределения дискретной случайной величины**

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n	

Пример 2.1. В коробке лежит 7 карандашей, среди которых 4 красных. Из коробки наудачу извлекают 3 карандаша. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу красных карандашей в выборке.

Решение

В выборке из трех карандашей может не оказаться ни одного красного карандаша, в то же время может появиться 1, 2 или 3 красных карандаша. Следовательно, случайная величина X может принимать только четыре значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Найдем вероятность этих значений:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35};$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35};$$

$$p_4 = P(X = 3) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Таким образом, случайная величина X имеет закон распределения, представленный в таблице 5.

Таблица 5 – **Закон распределения дискретной случайной величины примера 2.1**

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$\sum p_i = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$$

Пример 2.2. В партии товаров обнаружено 10% бракованных изделий. Наудачу отобрано 4 изделия. Найдите закон распределения случайной величины X – числа бракованных изделий среди четырех отобранных.

Решение

Случайная величина X имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни одно из изделий не браковано), $x_2 = 1$ (одно изделие из четырех браковано), $x_3 = 2$ (2 изделия из четырех бракованы), $x_4 = 3$ (3 изделия из четырех бракованы), $x_5 = 4$ (все изделия из четырех отобранных бракованы).

Вероятности этих значений рассчитаем по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ при $n = 4$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

В результате получим:

$$P_4(0) = 0{,}9^4 = 0{,}6\,561;$$

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2\,916;$$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0\,486;$$

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0\,036;$$

$$P_4(4) = 0{,}1^4 = 0{,}0\,001.$$

Ряд распределения приведен в таблице 6.

Таблица 6 – **Закон распределения дискретной случайной величины примера 2.2**

X	0	1	2	3	4
P	0,6 561	0,2 916	0,0 486	0,0 036	0,0 001

Аналитический закон распределения в данном примере, представленный формулой Бернулли, называется *биномиальным*.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i; p_i) и соединяют их последовательно отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распределения.

Пример 2.3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения, представленный в таблице 7.

Таблица 7 – **Закон распределения дискретной случайной величины примера 2.3**

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Постройте многоугольник распределения.

Решение

В прямоугольной системе координат строим точки $M_1(0{,}2;\ 0{,}1)$, $M_2(0{,}4;\ 0{,}2)$, $M_3(0{,}6;\ 0{,}4)$, $M_4(0{,}8;\ 0{,}2)$, $M_5(1;\ 0{,}1)$. Соединяем эти точки отрезками прямых (рисунок 1). Ломаная $M_1 M_2 M_3 M_4 M_5$ является многоугольником распределения.

Наиболее общей формой задания случайной величины является функция распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется функция действительной переменной x, определяемая равенством

$$F(x) = P(X < x), \tag{38}$$

где $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Функцию распределения называют также *интегральной функцией*.

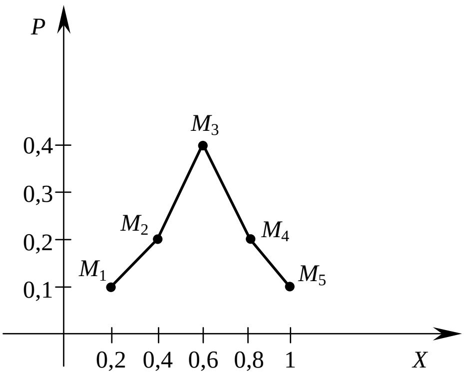

Рисунок 1 – **Многоугольник распределения**

Функции распределения присущи следующие *свойства*:

1) Функция распределения является неубывающей, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.

2) $0 \leq F(x) \leq 1$.

3) Если возможные значения случайной величины $X \in (a;\ b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$, $F(x) = 1$, $x > b$.

4) Вероятность того, что значение X окажется на заданном интервале $(a;\ b)$, определяется формулой

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{39}$$

Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими вероятностями, имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)\,. \tag{40}$$

Символ «$x_k < x$» означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x.

Пример 2.4. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей 8.

Таблица 8 – **Закон распределения дискретной случайной величины примера 2.4**

X	0	1	2	3
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Найдите функцию распределения случайной величины. Определите вероятность того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (2; 5).

Решение

1) При $x \le 0$ $F(x) = \sum\limits_{x_k < 0} P(X = x_k) = 0$ (так как величина X значений меньше нуля не принимает).

2) При $0 < x \le 1$ $F(x) = \sum\limits_{x_k < 1} P(X = x_k) = P(X = 0) = 0{,}2$.

3) При $1 < x \le 2$ $F(x) = \sum\limits_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}2 +$ $+ 0{,}4 = 0{,}6$.

4) При $2 < x \le 3$ $F(x) = \sum\limits_{x_k < 3} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$ $= 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}9$.

5) При $x > 3$ $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}2 +$ $+ 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$.

Значит,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x \le 0, \\ 0{,}2 & \text{ïðè} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}6 & \text{ïðè} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}9 & \text{ïðè} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{ïðè} \quad x > 3. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рисунке 2.

Определяем вероятность попадания случайной величины X в интервал (2; 5):

$$P(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

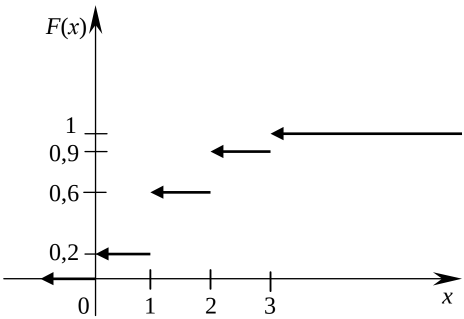

Рисунок 2 – **График функции *F*(*x*)**

2.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием $M(X)$ *дискретной случайной величины* X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \quad (41)$$

Математическое ожидание оценивает среднее значение случайной величины.

Математическое ожидание обладает следующими *свойствами*:

1) Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $M(C) = C$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = C \cdot M(X)$.

3) Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M(X - M(X)) = 0.$$

4) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

5) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Дисперсией $D(X)$ *дискретной случайной величины* X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 \cdot p_i . \qquad (42)$$

Дисперсия характеризует степень разброса значений случайной величины относительно математического ожидания.

Дисперсия случайной величины обладает следующими *свойствами*:

1) Дисперсия постоянной равна нулю: $D(X) = 0$.

2) Постоянный множитель в квадрате можно вынести за знак дисперсии: $D(CX) = C^2D(X)$.

3) Если X и Y – независимые случайные величины, то

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y);$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

4) Дисперсия случайной величины X равна математическому ожиданию квадрата без квадрата ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Среднее квадратическое отклонение (σ) исчисляется по формуле

$$\sigma = \sqrt{D(X)} . \qquad (43)$$

Начальным моментом порядка k случайной величины X (ν_k) называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k) = x_1^k p_1 + x_2^k p_2 + \ldots + x_n^k p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i . \qquad (44)$$

В частности, начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию: $\nu_1 = M(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X (μ_k) называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M\left(X - M(X)\right)^k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^k \cdot p_i . \qquad (45)$$

В частности, центральный момент второго порядка равен дисперсии $D(X)$:

$$\mu_2 = M\big(X - M(X)\big)^2 = \sum\big(x_i - M(X)\big)^2 \cdot p_i = D(X)\ .$$

Центральные моменты целесообразно вычислять, используя формулы, выражающие центральные моменты через начальные:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2\,;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3\,.$$

Найдем *числовые характеристики дискретной случайной величины, подчиняющейся биномиальному распределению*. В этом случае возможными значениями случайной величины X являются 0, 1, 2, …, n, а вероятности вычисляются по формуле Бернулли (таблица 9).

Таблица 9 – **Ряд распределения дискретной случайной величины, подчиняющейся биномиальному распределению**

X	0	1	2	…	k	…	n
P	q^n	$\tilde{N}_n^1 pq^{n-1}$	$\tilde{N}_n^2 p^2q^{n-2}$	…	$\tilde{N}_n^k p^kq^{n-k}$	…	p^n

Запишем математическое ожидание:

$$M(X) = C_n^1 pq^{n-1} + 2C_n^2 p^2q^{n-2} + ... + np^n = np(p+q)^n = np. \qquad (46)$$

Дисперсия может быть вычислена по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 = npq. \qquad (47)$$

Отличительной особенностью *распределения Пуассона*, задаваемого в виде ряда распределения, представленного в таблице 10, является равенство математического ожидания и дисперсии:

$$M(X) = D(X) = \lambda = np. \qquad (48)$$

Таблица 10 – **Ряд распределения дискретной случайной величины, подчиняющейся распределению Пуассона**

X	0	1	2	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	…

Пример 2.5. Найдите математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей 11.

Таблица 11 – **Закон распределения дискретной случайной величины примера 2.5**

X	1	2	3	4
P	0,3	0,1	0,4	0,2

Решение

Математическое ожидание равно:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 = 2{,}5.$$

Дисперсию вычисляем по формуле (42):

$$D(X) = (1 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}3 + (2 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}1 + (3 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}4 + \\ + (4 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}2 = 1{,}25.$$

Второй способ вычисления дисперсии основан на ее четвертом свойстве:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Так как $M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}2 = 7{,}5$, то $D(X) = 7{,}5 - (2{,}5)^2 = 1{,}25$.

Пример 2.6. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины $Z = 2X + Y$, если известно, что $M(X) = 2$, $M(Y) = 5$.

Решение

Используя свойства математического ожидания, получим:

$$M(Z) = M(2X + Y) = M(2X) + M(Y) = 2M(X) + M(Y) = 2 \cdot 2 + 5 = 9.$$

Пример 2.7. В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартные. Наудачу отобраны 2 детали. Найдите начальный момент первого и третьего порядка, а также центральные моменты второго и третьего порядка дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди отобранных.

Решение

Закон распределения может быть задан в виде таблицы 12.

Таблица 12 – **Закон распределения дискретной случайной величины примера 2.7**

X	0	1	2
P	$\frac{21}{45}$	$\frac{21}{45}$	$\frac{3}{45}$

$$\nu_1 = 0\cdot\frac{21}{45} + 1\cdot\frac{21}{45} + 2\cdot\frac{3}{45} = \frac{27}{45} = \frac{3}{5};$$

$$\nu_2 = 0\cdot\frac{21}{45} + 1^2\cdot\frac{21}{45} + 2^2\cdot\frac{3}{45} = \frac{33}{45} = \frac{11}{15};$$

$$\nu_3 = 0\cdot\frac{21}{45} + 1^3\cdot\frac{21}{45} + 2^3\cdot\frac{3}{45} = 1;$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{11}{15} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{28}{75};$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 1 - 3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{15} + 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{14}{125}.$$

Пример 2.8. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, ряд распределения которой получили в примере 2.2.

Решение

Дискретная случайная величина в примере 2.2 подчинена биномиальному закону распределения (таблица 13).

Таблица 13 – **Закон распределения дискретной случайной величины примера 2.8**

X	0	1	2	3	4
P	0,6 561	0,2 916	0,0 486	0,0 036	0,0 001

По формуле (46) найдем математическое ожидание:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

По формуле (47) определим дисперсию:

$$D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}36.$$

По формуле (43) вычислим среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$$

2.3. Непрерывные случайные величины

Функция распределения непрерывной случайной величины $F(x) = P(X < x)$ является непрерывно дифференцируемой, за исключением конечного числа точек.

Все свойства функции распределения дискретной случайной величины выполняются и для функции распределения непрерывной случайной величины.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \tag{49}$$

Плотность распределения называют также *дифференциальной функцией распределения*.

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{50}$$

Плотность распределения вероятностей обладает следующими *свойствами*:

1) $f(x) \geq 0$.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

3) $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

4) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 1$, если $X \in (a; b)$.

График плотности распределения называют кривой распределения. Дифференциальная функция существует только для непрерывных случайных величин, а интегральная как для непрерывных, так и дискретных случайных величин. Функция $f(x)$ вероятностью не является.

Пример 2.9. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{ïðè} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найдите ее плотность распределения.

Решение

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x \le 0, \\ \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{ïðè} \quad x > 0. \end{cases}$$

Так как $\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)' = \dfrac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Пример 2.10. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{ïðè} \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{ïðè} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (1; 2).

Решение

Используем третье свойство плотности распределения:

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Пример 2.11. Плотность распределения случайной величины *X* задана следующей функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x \le 0 \text{ è } x > 2, \\ x & \text{ïðè} \quad 0 < x \le 1, \\ 2 - x & \text{ïðè} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения *F*(*x*).

Решение

Воспользуемся формулой (50):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

При $x \le 0$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$.

При $0 < x \le 1$ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x x\,dx = 0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$.

Когда $1 < x \le 2$ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 x\,dx + \int_1^x (2 - x)\,dx = 0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 +$

$$+\left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^x = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

При $x > 2$ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2 - x)\,dx + \int_2^x 0\,dx = 0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 +$

$$+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2+0=\frac{1}{2}+4-2-2+\frac{1}{2}+0=1.$$

Искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{2} & \text{ïðè} \quad 0<x\le 1,\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & \text{ïðè} \quad 1<x\le 2,\\ 1 & \text{ïðè} \quad x>2. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ показаны на рисунках 3 и 4.

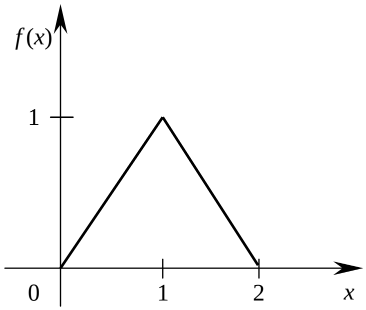

Рисунок 3 – **График функции $f(x)$**

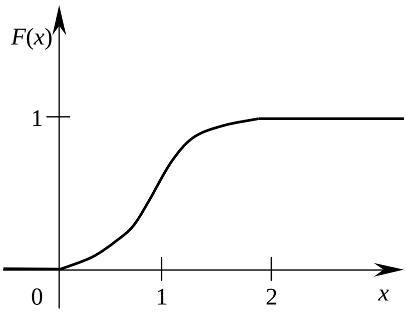

Рисунок 4 – **График функции $F(x)$**

2.4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx, \tag{51}$$

где $f(x)$ – плотность распределения.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенствами

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-M(x)\right)^2\cdot f(x)\,dx, \tag{52}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx-\left(M(x)\right)^2. \tag{53}$$

Все свойства $M(X)$ и $D(X)$, указанные для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Начальный момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется по формуле

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\cdot f(x)\,dx. \tag{54}$$

Центральный момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-M(X)\right)^k\cdot f(x)\,dx. \tag{55}$$

Если все возможные значения X принадлежат интервалу $(a;\, b)$, то используют следующие формулы:

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)\,dx; \tag{56}$$

$$D(X)=\int_a^b \left(x-M(X)\right)^2\cdot f(x)\,dx. \tag{57}$$

Пример 2.12. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x\le 0,\\ x^3 & \text{ïðè} \quad 0<x\le 1,\\ 1 & \text{ïðè} \quad x>1. \end{cases}$$

Выполните следующее:

1) Найдите плотность вероятности.

2) Вычислите математическое ожидание и дисперсию X.

3) Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,5).

4) Постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение

1) Найдем функцию плотности вероятности случайной величины X. По определению плотность вероятности $f(x)$ равна производной от функции распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x\le 0,\\ 3x^2 & \text{ïðè} \quad 0<x\le 1,\\ 0 & \text{ïðè} \quad x>1. \end{cases}$$

2) Вычислим математическое ожидание:

$$M(x)=\int_0^1 x\ f(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2\,dx=3\int_0^1 x^3\,dx=3\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{3}{4}.$$

Дисперсию величины X рассчитаем следующим образом:

$$D(x)=\int_0^1 x^2\ f(x)\,dx-M^2(x)=3\int_0^1 x^4\,dx-\frac{9}{16}=$$

$$= 3\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}.$$

3) Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,5):

$$P(0{,}25 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^3 - 0{,}25^3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}.$$

4) Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$ (рисунки 5 и 6).

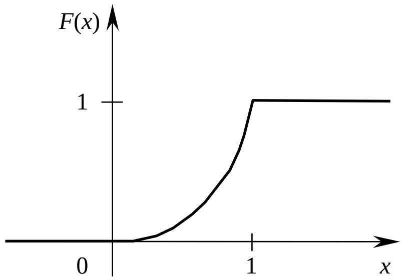

Рисунок 5 – **График интегральной функции**

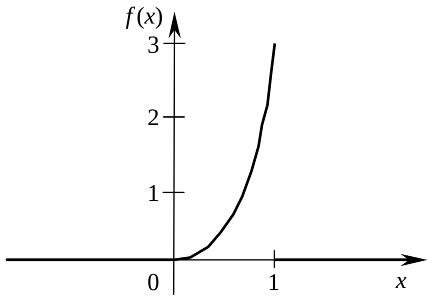

Рисунок 6 – **График дифференциальной функции**

2.5. Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

Законы распределения непрерывных случайных величин чаще всего задаются их дифференциальными функциями распределения. Различают равномерное, нормальное, показательное распределение.

Распределение вероятностей случайной величины X называется *равномерным на отрезке* [a; b], если плотность вероятностей этой величины постоянна на данном отрезке и равна нулю вне этого отрезка:

$$f(x)=\begin{cases} C & \text{ïðè} \quad a<x\le b, \\ 0 & \text{ïðè} \quad x\le a \text{ è } x>b, \end{cases} \tag{58}$$

где $C=\dfrac{1}{b-a}$.

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x\le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ïðè} \quad a<x\le b, \\ 1 & \text{ïðè} \quad x>b. \end{cases} \tag{59}$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ представлены на рисунках 7 и 8.

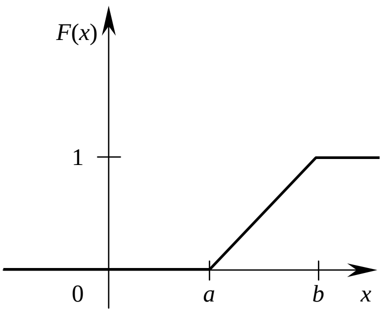

Рисунок 7 – **График функции *F*(*x*)**

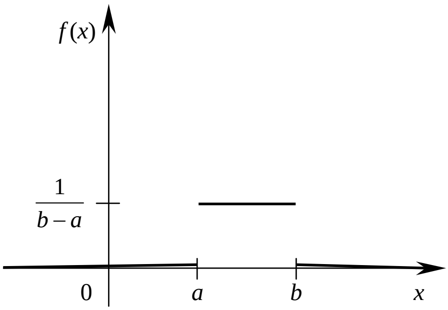

Рисунок 8 – **График функции *f*(*x*)**

Пример 2.13. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*, имеющей равномерное распределение на отрезке [*a*; *b*].

Решение

$$M(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} \cdot (b^3 - a^3) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Итак,

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad (60)$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (61)$$

Пример 2.14. Найдите вероятность того, что случайная величина *X*, распределенная равномерно в интервале (2; 8), примет значение, принадлежащее интервалу (5; 7).

Решение

Для заданного равномерного распределения плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x\le 2, \\ \dfrac{1}{6} & \text{ïðè} \quad 2<x\le 8, \\ 0 & \text{ïðè} \quad x>8. \end{cases}$$

Используем третье свойство плотности распределения:

$$P(5<X<7)=\int_5^7 \frac{1}{6}dx=\frac{1}{6}x\Big|_5^7=\frac{1}{3}.$$

Нормальным распределением, или *распределением Гаусса*, называется распределение с плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (62)$$

где a – математическое ожидание;

σ – среднее квадратическое отклонение.

Функция $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ обладает следующими *свойствами*:

1) Область определения – вся числовая ось.

2) $f(x)>0$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, следовательно, ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции.

4) Функция $f(x)$ имеет в точке $x=a$ максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) График функции симметричен относительно прямой $x=a$.

6) График функции в точках $x=a\pm\sigma$ имеет перегиб.

На основании перечисленных свойств представим график функции в виде нормальной кривой (рисунок 9).

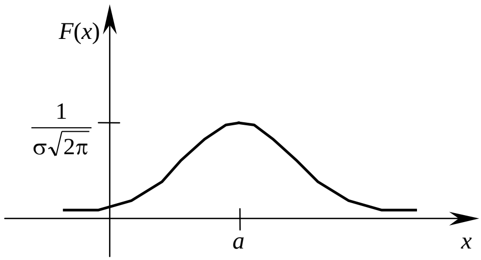

Рисунок 9 – **Нормальная кривая**

Если $a = 0$, $\sigma = 1$, то плотность распределения примет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Такое распределение вероятностей называется *нормированным*, или *стандартным*, а график функции называется нормированной кривой (рисунок 10).

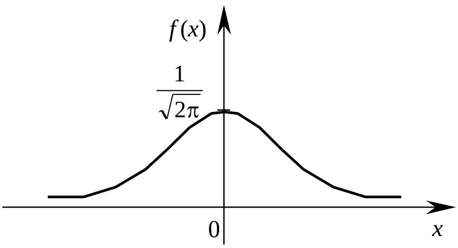

Рисунок 10 – **Нормированная кривая**

Параметр a характеризует положение нормальной кривой, а параметр σ – форму.

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервале $(\alpha; \beta)$ определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{63}$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Функция Лапласа описывается следующей формулой:

$$\hat{O}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{64}$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, выражается уравнением

$$P\left(\left|X - a\right| < \delta\right) = 2\hat{O}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{65}$$

В частности, при $a = 0$ справедливо равенство

$$P\left(\left|X\right| < \delta\right) = 2\hat{O}\left(\frac{\delta}{a}\right). \tag{66}$$

Положим $\frac{\delta}{\sigma} = t$, $\delta = \sigma t$. При $t = 3$ $\sigma t = 3\sigma$, тогда

$$P\left(\left|X - a\right| < 3\sigma\right) = 2\hat{O}(3) = 0{,}9973. \tag{67}$$

Полученная формула выражает *правило трех сигм*.

Пример 2.15. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 10$. Найдите $P(0 < X < 10)$, если известно, что $P(10 < X < 20) = 0{,}3$.

Решение

По условию $a = M(X) = 10$.

Тогда

$$P(10 < X < 20) = \hat{O}\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) - \hat{O}\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) =$$

$$= \hat{O}\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \hat{O}(0) - \hat{O}\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 0 = 0{,}3; \quad \hat{O}\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3.$$

Находим искомую вероятность:

$$P(0 < X < 10) = \hat{O}\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) - \hat{O}\left(\frac{0-10}{\sigma}\right) =$$

$$= \hat{O}(0) - \hat{O}\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = \hat{O}\left(\frac{10}{\sigma}\right); \quad \hat{O}\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3.$$

Итак, $P(0 < X < 10) = 0{,}3$.

Пример 2.16. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 375$ г, $\sigma = 25$ г. Найдите вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г.

Решение

1) По условию $\alpha = 300$; $\beta = 425$.

Получим:

$$P = (300 < X < 425) = \hat{O}\left(\frac{425-375}{25}\right) - \hat{O}\left(\frac{300-375}{25}\right) =$$

$$= \hat{O}(2) - \hat{O}(-3) = \hat{O}(2) + \hat{O}(3) = 0{,}477250 + 0{,}498650 = 0{,}9759.$$

2) Вычислим вероятность, если $X < 450$:

$$P(X < 450) = P(0 < X < 450) = \hat{O}\left(\frac{450-375}{25}\right) - \hat{O}\left(\frac{0-375}{25}\right) =$$

$$= \hat{O}(3) - \hat{O}(-15) = \hat{O}(3) + \hat{O}(15) = 0{,}49869 + 0{,}5 = 0{,}9987.$$

Пример 2.17. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром $\sigma = 10$ мм. Найдите вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм.

Решение

По условию $\delta = 15$, $\sigma = 10$. Для решения задачи воспользуемся формулой (65):

$$P\left(|X - a| < 15\right) = 2\hat{O}\left(\frac{15}{10}\right) = 2\hat{O}(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}433193 = 0{,}866386.$$

Показательным распределением называется распределение с плотностью вероятностей, определяемой функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ïðè} \quad x \geq 0. \end{cases} \qquad (68)$$

График функции $f(x)$ изображен на рисунке 11.

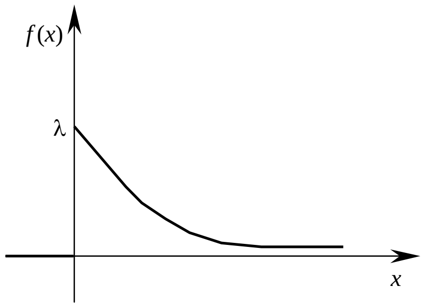

Рисунок 11 – **График функции $f(x)$**

Функция распределения *показательного закона* имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ïðè} \quad x \geq 0. \end{cases} \qquad (69)$$

Вероятность попадания в интервал $(a;\, b)$ равна:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \qquad (70)$$

Числовые характеристики показательного распределения вычисляются по формулам

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2};\ \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (71)$$

Пример 2.18. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x < 0, \\ 2e^{-2x} & \text{ïðè} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,3; 1).

Решение

По условию $\lambda = 2$, значит:

$$P(0{,}3 < X < 1) = e^{-2\cdot 0{,}3} - e^{-2\cdot 1} = e^{-0{,}6} - e^{-2} = 0{,}54\,881 - 0{,}13\,534 \approx 0{,}41.$$

Тема 3. СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. Понятие о двумерной случайной величине

Двумерной называют случайную величину (X, Y), возможные значения которой есть пары чисел (x, y).

Случайные величины X и Y, рассматриваемые совместно, образуют систему двух случайных величин. Каждую из величин X и Y называют *составляющей* (*компонентой*).

Например, цена X единицы товара и количество Y товара на рынке представляют собой двумерную случайную величину.

Общей характеристикой двумерной случайной величины является функция распределения вероятностей, которая представляет собой вероятность события ($X < x$, $Y < y$); $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.

Различают дискретные (составляющие этих величин дискретны) и непрерывные (составляющие этих величин непрерывны) двумерные случайные величины.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины (т. е. пар чисел) (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$).

Закон распределения двумерной случайной величины может быть задан в виде таблицы с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности, а также аналитически, например, в виде функции распределения.

Зная закон распределения двумерной дискретной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих.

Например, события ($X = x_1$, $Y = y_1$), ($X = x_1$, $Y = y_2$), …, ($X = x_1$, $Y = y_m$) несовместны, поэтому

$$P(x_1) = P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) + \ldots + P(x_1, y_m).$$

Таким образом, вероятность того, что X примет значение x_i, равна сумме вероятностей столбца x_i. Аналогично, сложив вероятности строки y_j, получим вероятность $P(Y = y_j)$.

Пример 3.1. Найдите законы распределения составляющих двумерной случайной величины, закон распределения которой задан в таблице 14.

Таблица 14 – **Двумерная случайная величина примера 3.1**

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Решение

Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений X: $P(x_1) = 0,16$; $P(x_2) = 0,48$; $P(x_3) = 0,36$.

Представим закон распределения составляющей X в виде таблицы (таблица 15).

Таблица 15 – **Закон распределения составляющей *X***

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

Проверим: $0,16 + 0,48 + 0,36 = 1$.

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений Y: $P(y_1) = 0,60$; $P(y_2) = 0,40$.

Представим закон распределения составляющей Y в виде таблицы (таблица 16).

Таблица 16 – **Закон распределения составляющей *Y***

Y	y_1	y_2
P	0,60	0,40

Проверим: $0,60 + 0,40 = 1$.

3.2. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной случайной величины

Условным распределением составляющей X при $Y = y_j$ называют совокупность условных вероятностей $P(x_1|y_j)$, $P(x_2|y_j)$, …, $P(x_n|y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех возможных значениях X) уже наступило.

Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

Условный закон распределения X в предположении, что событие $Y = y_1$ уже произошло, может быть определен по формуле

$$P(x_i|y_1)=\frac{P(x_i,y_1)}{P(y_1)}\ (i=1,2,...,n). \tag{72}$$

В общем случае условные законы для составляющей X имеют вид:

$$P(x_i|y_j)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(y_j)}. \tag{73}$$

Для составляющей Y условные законы рассчитываются по формуле

$$P(y_j|x_i)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(x_i)}. \tag{74}$$

Пример 3.2. Двумерная случайная величина задана таблицей 17.

Таблица 17 – **Двумерная случайная величина примера 3.2**

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Найдите условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение y_1, а также условный закон распределения составляющей Y при условии, что X приняло значение x_1.

Решение

Воспользуемся формулой (72), где $P(y_1) = 0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}60$. Тогда

$$P(x_1|y_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0{,}10}{0{,}60} = \frac{1}{6};$$

$$P(x_2|y_1) = \frac{P(x_2, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}60} = \frac{1}{2};$$

$$P(x_3|y_1) = \frac{P(x_3, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0{,}20}{0{,}60} = \frac{1}{3}.$$

Для контроля просуммируем найденные вероятности:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1.$$

Приведем искомый условный закон распределения X в виде таблицы 18.

Таблица 18 – **Закон распределения составляющей *X***

X	x_1	x_2	x_3
$P\left(\frac{X}{y_1}\right)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Аналогично найдем условный закон распределения Y (таблица 19).

Таблица 19 – **Закон распределения составляющей *Y***

Y	y_1	y_2
$P\left(\frac{Y}{x_2}\right)$	$\frac{30}{48}$	$\frac{18}{48}$

3.3. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Среди числовых характеристик двумерной случайной величины важнейшими являются условное математическое ожидание и ковариация.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$ называют сумму произведений возможных значений Y на их условные вероятности:

$$M(Y|X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j|x). \tag{75}$$

Аналогично для X при $Y = y$ имеем:

$$M(X|Y = y) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i|y). \tag{76}$$

Ковариацией, или *корреляционным моментом*, случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий:

$$K_{xy} = M((X - M_x)(Y - M_y)) \text{, причем } K_{xy} = K_{yx}. \tag{77}$$

Коэффициентом корреляции (r_{xy}) случайных величин X и Y называется отношение ковариации к произведению средних квадратичных отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{78}$$

При этом $-1 \le r_{xy} \le 1$.

Корреляционные моменты и дисперсии можно представить в виде корреляционной матрицы

$$\begin{pmatrix} D(X) & K_{xy} \\ K_{yx} & D(Y) \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Пример 3.3. Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей 20.

Таблица 20 – **Дискретная двумерная случайная величина примера 3.3**

Y	X			
	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
$y_1 = 3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2 = 6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Найдите условное математическое ожидание составляющей Y при $X = x_1 = 1$.

Решение

Найдем значение вероятности:

$$P(x_1) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45.$$

Тогда

$$P\left(y_1 | x_1\right) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(x_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{1}{3};$$

$$P\left(y_2 | x_1\right) = \frac{P(x_1, y_2)}{P(x_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}45} = \frac{2}{3}.$$

Вычислим условное математическое ожидание:

$$M\left(Y | X = x_1\right) = \sum_{j=1}^{2} y_j P\left(y_j | x_1\right) = y_1 P\left(y_1 | x_1\right) + y_2 P\left(y_2 | x_1\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

Пример 3.4. Закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) задан таблицей 21.

Таблица 21 – **Закон распределения двумерной случайной величины примера 3.4**

Y	X		
	1	3	4
2	0,10	0,05	0,12
3	0,20	0,14	0,08
5	0,15	0,11	0,05

Найдите одномерные законы распределения компонент X и Y, корреляционный момент, корреляционную матрицу, коэффициент корреляции.

Решение

1) Составим одномерные законы распределения X и Y.

Сначала находим вероятности возможных значений X:

$$P(X=1)=0{,}10+0{,}20+0{,}15=0{,}45;$$

$$P(X=3)=0{,}05+0{,}14+0{,}11=0{,}30;$$

$$P(X=4)=0{,}12+0{,}08+0{,}05=0{,}25.$$

Проверим: $0{,}45+0{,}30+0{,}25=1$.

Аналогично находим вероятности возможных значений Y, сложив вероятности по строкам:

$$P(Y=2)=0{,}10+0{,}05+0{,}12=0{,}27;$$

$$P(Y=3)=0{,}20+0{,}14+0{,}08=0{,}42;$$

$$P(Y=5)=0{,}15+0{,}11+0{,}05=0{,}31.$$

Проверим: $0{,}27+0{,}42+0{,}31=1$.

Одномерные законы распределения компонент X и Y показаны в таблицах 22 и 23.

Таблица 22 – **Закон распределения компоненты *X***

X	1	3	4
P	0,45	0,30	0,25

Таблица 23 – **Закон распределения компоненты *Y***

Y	2	3	5
P	0,27	0,42	0,31

Находим математические ожидания:

$$M(X)=1\cdot 0{,}45+3\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}25=2{,}35\ ;$$

$$M(Y)=2\cdot 0{,}27+3\cdot 0{,}42+5\cdot 0{,}31=3{,}35\ ;$$

$$M(X^2)=1\cdot 0{,}45+9\cdot 0{,}3+16\cdot 0{,}25=7{,}15\ ;$$

$$M(Y^2) = 4 \cdot 0{,}27 + 9 \cdot 0{,}42 + 25 \cdot 0{,}31 = 12{,}61\ .$$

Тогда

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 7{,}15 - 2{,}35^2 = 7{,}15 - 5{,}52 = 1{,}63\ .$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 12{,}61 - 3{,}35^2 = 12{,}61 - 11{,}22 = 1{,}39\ .$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = 1{,}28;\ \ \sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = 1{,}18.$$

2) Корреляционный момент вычислим по формуле (77).
Составим таблицу отклонений (таблица 24).

Таблица 24 – **Таблица отклонений**

$Y - M(Y)$	$X - M(X)$		
	–1,35	0,65	1,65
–1,35	0,10	0,05	0,12
–0,35	0,20	0,14	0,08
1,65	0,15	0,11	0,05

Находим корреляционный момент:

$$K_{XY} = -1{,}35(-1{,}35 \cdot 0{,}1 + 0{,}65 \cdot 0{,}05 + 1{,}65 \cdot 0{,}12) -$$

$$- 0{,}35(-1{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}65 \cdot 0{,}14 + 1{,}65 \cdot 0{,}08) +$$

$$+ 1{,}65(-1{,}35 \cdot 0{,}15 + 0{,}65 \cdot 0{,}11 + 1{,}65 \cdot 0{,}05) =$$

$$= -1{,}35(-0{,}135 + 0{,}0\,325 + 0{,}138) - 0{,}35(-0{,}27 + 0{,}091 + 0{,}132) +$$

$$+ 1{,}65(-0{,}2\,025 + 0{,}0\,715 + 0{,}0\,825) = -0{,}128 + 0{,}0\,165 - 0{,}08 = -0{,}19.$$

3) Запишем корреляционную матрицу:

$$\begin{pmatrix} D(X) & K_{XY} \\ K_{YX} & D(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}63 & -0{,}19 \\ -0{,}19 & 1{,}39 \end{pmatrix}.$$

4) Найдем коэффициент корреляции:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0{,}19}{1{,}28 \cdot 1{,}18} = -0{,}126.$$

Так как $r_{XY} \neq 0$, величины X и Y зависимы.

Тема 4. ГЕНЕРАЛЬНАЯ И ВЫБОРОЧНАЯ СОВОКУПНОСТЬ

4.1. Предмет и задачи математической статистики

Математическая статистика – это наука, занимающаяся методами обработки экспериментальных данных. Любая наука решает в порядке возрастания сложности и важности задачи, а именно:

- описание явления;
- анализ и прогноз;
- поиск оптимального решения.

Такого рода *задачи* решает и математическая статистика, где необходимо:

1) Систематизировать полученный статистический материал.

2) На основании полученных экспериментальных данных оценить интересующие нас числовые характеристики наблюдаемой случайной величины.

3) Определить число опытов, достаточное для получения достоверных результатов при минимальных ошибках измерения.

Одной из задач третьего типа является *задача проверки правдоподобия гипотез*. Она может быть сформулирована следующим образом: имеется совокупность опытных данных, относящихся к одной или нескольким случайным величинам. Необходимо определить, противоречат ли эти данные той или иной гипотезе, например, гипотезе о том, что исследуемая случайная величина распределена по определенному закону, или две случайные величины некоррелированы (т. е. не связаны между собой) и т. д. В результате проверки правдоподобия гипотезы она либо отбрасывается, как противоречащая опытным данным, либо принимается, как приемлемая.

Таким образом, математическая статистика помогает экспериментатору лучше разобраться в полученных опытных данных, оценить, значимы или нет определенные наблюдаемые факты, принять или отбросить те или иные гипотезы о природе рассматриваемого явления.

4.2. Генеральная и выборочная совокупность статистических данных

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

Качественными признаками объект обладает либо не обладает. Они не поддаются непосредственному измерению (например, спортивная специализация, квалификация, национальность, территориальная принадлежность и т. п.).

Количественные признаки представляют собой результаты подсчета или измерения. В соответствии с этим они делятся на дискретные и непрерывные.

Иногда проводится *сплошное* обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Различают генеральную и выборочную совокупность.

Выборочной совокупностью (*выборкой*) называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной (*основной*) *совокупностью* называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1 000 деталей отобрано для обследования 100, то объем генеральной совокупности $N = 1\ 000$, а объем выборки $n = 100$. Число объектов генеральной совокупности значительно превосходит объем выборки.

Составление выборки можно осуществлять двумя *способами*: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии с этим выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли (выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности), т. е. выборка должна быть *репрезентативной* (*представительной*).

Выборка будет репрезентативной в случае:

1) если каждый объект выборки *отобран случайно* из генеральной совокупности;

2) если все объекты имеют *одинаковую вероятность* попасть в выборку.

Существует несколько *способов группировки статистических данных*. Рассмотрим некоторые из них.

Дискретный вариационный ряд. Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

Допустим, проводились наблюдения над числом X оценок, полученных студентами университета на экзаменах. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты: 3, 4, 3, 5, 4, 2, 2, 4, 4, 3, 5, 2, 4, 5, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 4, 2, 2, 5, 5, 4, 5, 2, 3, 4, 4, 3, 4, 5, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 2, 4, 4, 5, 4, 3, 5, 3, 5, 4, 4, 5, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 5.

Здесь число X является дискретной случайной величиной, а полученные о ней сведения представляют собой *статистические* (*наблюдаемые*) *данные*.

Расположив приведенные выше данные в порядке *неубывания* и *сгруппировав* их так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы, получают *ранжированный ряд* данных наблюдения.

В данном примере имеем четыре группы со следующими значениями случайной величины: 2, 3, 4, 5. Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называют *вариантом*, а изменение этого значения *варьированием*.

Варианты обозначают малыми буквами латинского алфавита с соответствующими порядковому номеру группы индексами – x_i. Число, которое показывает, сколько раз встречается соответствующий вариант в ряде наблюдений, называют *частотой* варианта и обозначают соответственно n_i.

Сумма всех частот ряда $\sum n_i = n$ – объем выборки. Отношение частоты варианта к объему выборки $\sum \frac{n_i}{n} = w_i$ называют *относительной частотой*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

Пример 4.1. Задано распределение частот выборки объема n = 20 (таблица 25).

Таблица 25 – **Распределение частот выборки**

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Запишите распределение относительных частот.

Решение

Найдем относительные частоты. Для этого разделим частоты на объем выборки:

$$w_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \quad w_2 = \frac{10}{20} = 0{,}50; \quad w_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Запишем распределение относительных частот в таблицу 26.

Таблица 26 – **Распределение относительных частот**

x_i	2	6	12
w_i	0,15	0,50	0,35

Проверим: 0,15 + 0,50 + 0,35 = 1.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Дискретным вариационным рядом распределения называют ранжированную совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или относительными частотами w_i.

Для рассмотренного выше примера об оценках студентов дискретный вариационный ряд показан в таблице 27.

Таблица 27 – **Дискретный вариационный ряд**

x_i	2	3	4	5
n_i	8	12	23	17
w_i	$\frac{8}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{23}{60}$	$\frac{17}{60}$

Сделаем проверку. Сумма всех частот вариационного ряда (сумма значений второй строки таблицы) есть объем выборки ($n = 60$); сумма относительных частот вариационного ряда должна быть равна 1 (сумма значений третьей строки таблицы).

Интервальный вариационный ряд. Если изучаемая случайная величина является непрерывной, то ранжирование и группировка наблюдаемых значений зачастую не позволяют выделить характерные черты варьирования ее значений. Это объясняется тем, что отдельные значения случайной величины могут как угодно мало отличаться друг от друга и поэтому в совокупности наблюдаемых данных одинаковые значения величины могут встречаться редко, а частоты вариантов мало отличаться друг от друга.

Нецелесообразно также построение дискретного ряда для дискретной случайной величины, число возможных значений которой велико. В подобных случаях следует строить *интервальный вариационный ряд* распределения.

Для построения такого ряда весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины разбивают на ряд *частичных интервалов* и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

Интервальным вариационным рядом называют упорядоченную совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений величины.

Для построения интервального ряда необходимо:

1) определить *величину* частичных интервалов;

2) определить *ширину* интервалов;

3) установить для каждого интервала его *верхнюю* и *нижнюю границы*;

4) сгруппировать результаты наблюдений.

Вопрос о выборе числа и ширины интервалов группировки приходится решать в каждом конкретном случае исходя из целей исследования, объема выборки и степени варьирования признака в выборке.

Приблизительное число интервалов (k) можно найти исходя только из объема выборки (n) одним из следующих способов:

1) по формуле Стержеса: $k = 1 + 3{,}32 \cdot \lg n$;

2) с помощью таблицы интервального вариационного ряда (таблица 28).

Таблица 28 – **Интервальный вариационный ряд**

Объем выборки (n)	25–40	40–60	60–100	100–200	Больше 200
Число интервалов (k)	5–6	6–8	7–10	8–12	10–15

Обычно предпочтительны интервалы одинаковой ширины. Для определения ширины интервалов (h) вычисляют:

1) *размах варьирования* (R) – значений выборки по формуле $R = x_{\max} - x_{\min}$ ($x_{\max}$ и $x_{\min}$ – максимальная и минимальная варианты выборки);

2) ширину каждого из интервалов по формуле $h = \dfrac{R}{k}$.

Нижняя граница первого интервала (x_{h_1}) выбирается так, чтобы минимальная варианта выборки ($x_{\min}$) попадала примерно в середину этого интервала: $x_{h_1} = x_{\min} - 0{,}5h$.

Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h: $x_{h_i} = x_{h_{i-1}} + h$.

Построение шкалы интервалов на основе вычисления границ интервалов продолжается до тех пор, пока величина x_{h_i} удовлетворяет соотношению $x_{h_i} < x_{\max} + 0{,}5 \cdot h$.

В соответствии со шкалой интервалов производится группирование значений признака – для каждого частичного интервала вычисляется сумма частот n_i вариант, попавших в i-й интервал. При этом в интервал включают значения случайной величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы интервала.

4.3. Полигон и гистограмма

Для наглядности используют различные графики статистического распределения.

По данным дискретного вариационного ряда строят полигон частот или относительных частот.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i; n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот (рисунок 12).

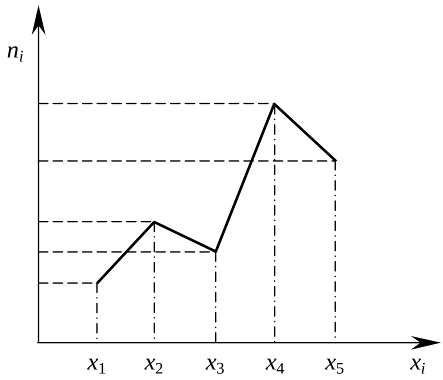

Рисунок 12 – **Полигон частот**

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, ..., $(x_k; w_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты w_i. Точки $(x_i; w_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии $\frac{n_i}{h}$.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна сумме частот вариант i-го интервала $\left(\frac{hn_i}{h} = n_i\right)$. Следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки*.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$ (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии $\frac{w_i}{h}$ (рисунок 13).

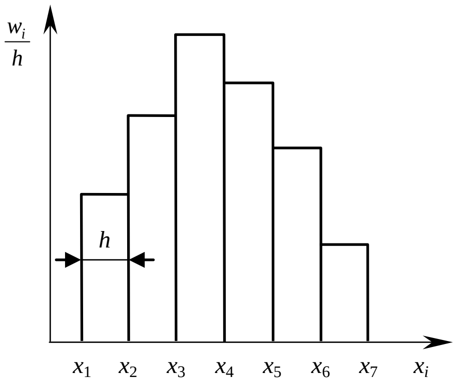

Рисунок 13 – **Гистограмма относительных частот**

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $\frac{hw_i}{h} = w_i$ – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот* равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.

4.4. Оценка параметров генеральной совокупности

Основными параметрами генеральной совокупности являются математическое ожидание (генеральная средняя) ($M(X)$) и среднее квадратическое отклонение (σ). Это постоянные величины, которые можно оценить по выборочным данным.

Оценка генерального параметра, выражаемая одним числом, называется *точечной*.

Точечной оценкой генеральной средней является выборочное среднее $\overline{X}$.

Выборочным средним называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки различны (или если данные не сгруппированы), то применяют формулу

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{80}$$

Если же все значения признака $x_1, x_2, ..., x_n$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ (или если выборочное среднее вычисляется по вариационному ряду), то используют формулу

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i n_i}{n}. \tag{81}$$

В том случае, когда статистические данные представлены в виде интервального вариационного ряда, при вычислении выборочного среднего $\overline{x}$ значениями вариант считают середины интервалов.

Выборочное среднее является основной характеристикой, *показывает центр распределения совокупности*, позволяет охарактеризовать исследуемую совокупность одним числом, проследить тенденцию развития, сравнить различные совокупности (выборочное среднее является той точкой, сумма отклонений наблюдений от которой равна 0).

Для оценки *степени разброса* (*отклонения*) какого-то показателя от его среднего значения, наряду с максимальным и минимальным значениями, используются понятия дисперсии и стандартного отклонения.

Дисперсия выборки, или *выборочная дисперсия,* – это мера изменчивости переменной. (Термин впервые был введен Фишером в 1918 г.)

Выборочной дисперсией ($D_в$) называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\bar{x}$.

Если все значения x_1, x_2, ..., x_n признака выборки объема n различны, выборочную дисперсию определяют по формуле

$$D_{\hat{a}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} . \qquad (82)$$

Если же все значения признака x_1, x_2, ..., x_n имеют соответственно частоты n_1, n_2, ..., n_k, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то используют формулу

$$D_{\hat{a}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} . \qquad (83)$$

Дисперсия меняется от нуля до бесконечности. Крайнее значение 0 означает отсутствие изменчивости, когда значения переменной постоянны.

Среднее квадратическое отклонение (*стандартное отклонение*) вычисляется как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D_{\hat{a}}} . \qquad (84)$$

Чем выше дисперсия или стандартное отклонение, тем сильнее разбросаны значения переменной относительно среднего.

Непараметрическими характеристиками являются мода и медиана.

Модой (M_o) называется варианта, имеющая наибольшую частоту или относительную частоту.

Медианой (M_e) называется варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант.

При нечетном числе вариант ($n = 2k + 1$) медиана исчисляется по формуле

$$M_e = x_{k+1}. \qquad (85)$$

При четном числе вариант ($n = 2k$) медиана равна:

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\,. \qquad (86)$$

Пример 4.2. Найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию данного статистического распределения (таблица 29).

Таблица 29 – **Вариационный ряд примера 4.2**

x_i	20,0	20,2	20,4	20,6	20,8	21,0	21,2	21,4	21,6	21,8	22,0
m_i	2	3	7	11	17	20	16	13	6	4	1

Решение

Составим расчетную таблицу. Для этого:

1) Запишем варианты в первый столбец (таблица 30).

Таблица 30 – **Расчетная таблица примера 4.2**

x_i	m_i	u_i	m_iu_i	$m_iu_i^2$	$m_i(u_i+1)^2$
1	2	3	4	5	6
20,0	2	–5	–10	50	32
20,2	3	–4	–12	48	27
20,4	7	–3	–21	63	28
20,6	11	–2	–22	44	11
20,8	17	–1	–17	17	0
21,0	20	0	$A_1 = -82$	–	20
21,2	160	1	16	16	64
21,4	13	2	26	52	117
21,6	6	3	18	54	96
21,8	4	4	16	64	100
22,0	1	5	5	25	36
–	100	–	$A_2 = 81$	–	–
–	–	–	$\sum m_iu_i = -1$	$\sum m_iu_i^2 = 433$	$\sum m_i(u_i+1)^2 = 531$

2) Запишем частоты во второй столбец, сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца.

3) В качестве ложного нуля выберем варианту 21,0 (в середине ряда) и запишем условные варианты: $u_i = \dfrac{x_i - 21}{0{,}2}$ (третий столбец).

4) Произведения частот на условные варианты записываем в четвертый столбец; отдельно находим сумму отрицательных (–82) и отдельно сумму положительных (81) чисел, а их сумму (–1) помещаем в нижнюю клетку столбца.

5) Произведения частот на квадраты условных вариант записываем в пятый столбец, а их сумму (433) помещаем в нижнюю клетку столбца.

6) Произведения частот на квадраты условных вариант, увеличенных на единицу, запишем в шестой контрольный столбец, а их сумму (531) помещаем в нижнюю клетку столбца.

Выполним контроль:

$$\sum m_i u_i^2 + 2\sum m_i u_i + n = 433 + 2\cdot(-1) + 100 = \sum m_i (u_i + 1)^2 .$$

Вычисления произведены правильно.

Вычислим теперь условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1 = \frac{\sum m_i u_i}{n} = \frac{-1}{100} = -0{,}01;$$

$$M_2 = \frac{\sum m_i u_i^2}{n} = \frac{433}{100} = 4{,}33 .$$

Найдем искомые выборочные среднюю и дисперсию:

$$\bar{x} = M_1 h + C = (-0{,}01)\cdot 0{,}2 + 21 = 20{,}8 ;$$

$$D_{â} = \left(M_2 - M_1^2\right)\cdot h^2 = \left(4{,}33 - (-0{,}01)^2\right)\cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}173 .$$

Тема 5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

5.1. Статистические гипотезы. Проверка статистических гипотез

Методы математической статистики позволяют проверить предположения о законе распределения некоторой случайной величины (генеральной совокупности), значениях параметров этого закона (например $M(X)$, $D(X)$), наличии корреляционной зависимости между случайными величинами, определенными на множестве объектов одной и той же генеральной совокупности.

Пусть по некоторым данным имеются основания выдвинуть предположения о законе распределения или о параметре закона распределения случайной величины (или генеральной совокупности, на множестве объектов которой определена эта случайная величина). Задача заключается в том, чтобы подтвердить или опровергнуть это предположение, используя выборочные (экспериментальные) данные.

Гипотезы о значениях параметров распределения или о сравнительной величине параметров двух распределений называются *параметрическими гипотезами*. Гипотезы о виде распределения называются *непараметрическими гипотезами*.

Проверить статистическую гипотезу – значит проверить, согласуются ли данные, полученные из выборки, с этой гипотезой. Проверка осуществляется с помощью статистического критерия.

Статистический критерий – это случайная величина, закон распределения которой (вместе со значениями параметров) известен в случае, если принятая гипотеза справедлива. Этот критерий называют еще *критерием согласия* (имеется в виду согласие принятой гипотезы с результатами, полученными из выборки).

Гипотезу, выдвинутую для проверки ее согласия с выборочными данными, называют *нулевой гипотезой* и обозначают H_0. Вместе с гипотезой H_0 выдвигается *альтернативная*, или *конкурирующая*, гипотеза, которая обозначается H_1, например:

1) H_0: $M = 0$, H_1: $M \neq 0$.

2) H_0: $M = 0$, H_1: $M > 0$.

3) H_0: $M = 0$, H_1: $M = 2$.

Пусть случайная величина K – статистический критерий проверки некоторой гипотезы H_0. При справедливости гипотезы H_0 закон распределения случайной величины K характеризуется некоторой известной нам плотностью распределения $p_K(x)$.

Выберем некоторую малую вероятность α, равную 0,05, 0,01 или еще меньшую. Определим *критическое значение критерия* ($K_{кр}$) как решение одного из трех уравнений в зависимости от вида нулевой и конкурирующей гипотез:

$$P(K > K_{кр}) = \alpha\ ; \tag{87}$$

$$P(K < K_{кр}) = \alpha\ ; \tag{88}$$

$$P((K < K_{кр1}) \cap (K > K_{кр2})) = \alpha\ . \tag{89}$$

Возможны и другие уравнения, но они встречаются значительно реже, чем приведенные.

Чтобы решить уравнение (87), нужно по вероятности α, зная функцию $p_K(x)$, заданную, как правило, таблицей, определить $K_{кр}$.

Если гипотеза H_0 справедлива, то вероятность того, что критерий K превзойдет некоторое значение $K_{кр}$, очень мала – 0,05, 0,01 или еще меньше (в зависимости от нашего выбора). Если $K_в$ – значение критерия K, рассчитанное по выборочным данным, превзошло значение $K_{кр}$, это означает, что выборочные данные не дают основания для принятия нулевой гипотезы H_0 (например, если α = 0,01, то можно сказать, что произошло событие, которое при справедливости гипотезы H_0 встречается в среднем не чаще, чем в одной из ста выборок). В этом случае говорят, что *гипотеза H_0 не согласуется с выборочными данными и должна быть отвергнута*. Если $K_в$ не превосходит $K_{кр}$, то говорят, что *выборочные данные не противоречат гипотезе* H_0, и нет оснований отвергать эту гипотезу.

Для уравнения (87) область $K > K_{кр}$ называется *критической областью*. Если значение $K_в$ попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается.

Область $K < K_{кр}$ называется *областью принятия гипотезы*. Если значение $K_в$ попадает в область принятия гипотезы, то гипотеза H_0 принимается.

Рисунок 14 иллюстрирует решение уравнения (87). Здесь $p_K(x)$ – известная плотность распределения случайной величины K при условии справедливости гипотезы H_0.

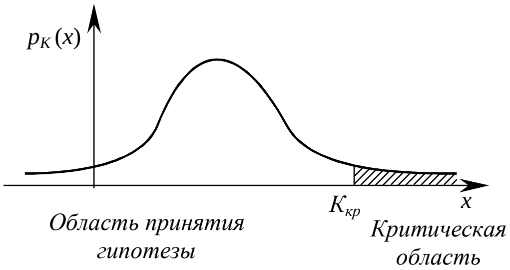

Рисунок 14 – **Правосторонняя критическая область**

Пусть выбрано некоторое малое значение вероятности α, по которому определено значение $K_{кр}$, а по выборочным данным определено значение $K_{в}$, которое попало в критическую область. В этом случае гипотеза H_0 отвергается, но она может оказаться справедливой, просто случайно произошло событие, которое имеет очень малую вероятность α. В этом смысле α есть вероятность отвержения правильной гипотезы H_0.

Отвержение правильной гипотезы называется *ошибкой первого рода*. Вероятность α называется уровнем значимости. Таким образом, *уровень значимости* – это вероятность совершения ошибки первого рода.

Критическая область, полученная для уравнения (87) и приведенная на рисунке 14, называется *правосторонней*.

Уравнение (88) определяет *левостороннюю критическую область*. Ее изображение приводится на рисунке 15.

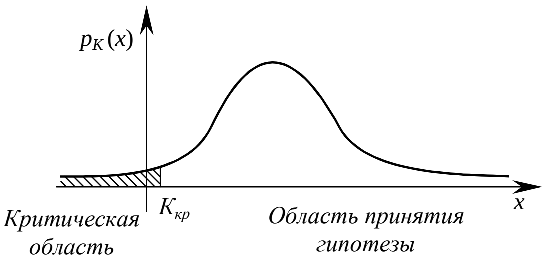

Рисунок 15 – **Левосторонняя критическая область**

Отметим, что каждая из заштрихованных фигур на рисунках 14 и 15 имеет площадь, равную α.

Уравнение (89) определяет *двустороннюю критическую область*. На рисунке 16 критическая область состоит из двух частей. В случае двусторонней критической области границы ее частей $K_{кр1}$ и $K_{кр2}$ определяются таким образом, чтобы выполнялось следующее условие:

$$P(K \le K_{\text{êð}}) = P(K \ge K_{\text{êð}}) = \frac{\alpha}{2}.$$

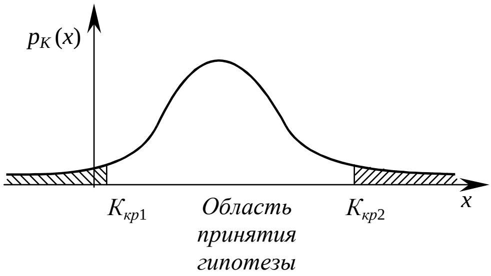

Рисунок 16 – **Двусторонняя критическая область**

На рисунке 16 площадь каждой из заштрихованных фигур равна $\dfrac{\alpha}{2}$.

Вид критической области зависит от того, какая гипотеза выдвинута в качестве конкурирующей.

Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность отвергнуть проверяемую гипотезу H_0, когда она верна, т. е. совершить ошибку первого рода. Но с уменьшением уровня значимости расширяется область принятия гипотезы H_0 и увеличивается вероятность принятия проверяемой гипотезы, когда она неверна, т. е. когда предпочтение должно быть отдано конкурирующей гипотезе.

Пусть при справедливости гипотезы H_0 статистический критерий K имеет плотность распределения $p_0(x)$, а при справедливости конкурирующей гипотезы H_1 – плотность распределения $p_1(x)$. Графики этих функций приведены на рисунке 17.

При некотором уровне значимости находится критическое значение и правосторонняя критическая область. Если значение $K_в$, определенное по выборочным данным, оказывается меньше чем $K_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. Предположим, что справедлива на самом деле конкурирующая гипотеза H_1. Тогда вероятность попадания критерия в область принятия гипотезы H_0 есть некоторое число β, равное площади фигуры, образованной графиком функции $p_1(x)$ и полубесконечной частью горизонтальной координатной оси, лежащей слева от точки $K_{кр}$. Очевидно, что β – это вероятность того, что будет принята неверная гипотеза H_0.

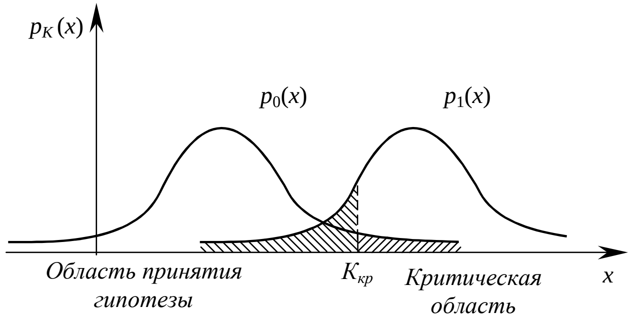

Рисунок 17 – **Графики функций $p_0(x)$ и $p_1(x)$**

Принятие неверной гипотезы называется *ошибкой второго рода*. В рассмотренном случае число β – это вероятность ошибки второго рода. Число 1 – β, равное вероятности того, что не совершается ошибка второго рода, называется *мощностью критерия*.

На рисунке 17 мощность критерия равна площади фигуры, образованной графиком функции $p_1(x)$ и полубесконечной частью горизонтальной координатной оси, лежащей справа от точки $K_{кр}$.

Выбор статистического критерия и вида критической области осуществляется таким образом, чтобы мощность критерия была максимальной.

5.2. Критерии согласия

Эмпирические частоты получают в результате опыта (наблюдения). *Теоретические частоты* рассчитывают по формулам. Для нормального закона распределения их можно найти следующим образом:

$$n_i = \frac{\varphi(t_i) \cdot h}{\sigma_{\hat{a}}} \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \ , \qquad (90)$$

где $\sum_{j=1}^{n} m_j$ – сумма эмпирических частот;

h – разность между двумя соседними вариантами;

$\sigma_в$ – выборочное среднеквадратическое отклонение;

$\varphi(t)$ – значение функции, определяемое по таблице (см. приложение А).

При этом $t_i = \frac{x_i - \overline{x}_{\hat{a}}}{\sigma_{\hat{a}}}$, $\overline{x}_{\hat{a}}$ – выборочная средняя арифметическая.

Обычно эмпирические и теоретические частоты различаются. Возможно, что расхождение случайно и связано с ограниченным количеством наблюдений; возможно, что расхождение неслучайно и объясняется тем, что для вычисления теоретических частот выдвинута статистическая гипотеза о том, что генеральная совокупность распределена нормально, а в действительности это не так. Распределение генеральной совокупности, которое она имеет в силу выдвинутой гипотезы, называют *теоретическим*.

Возникает необходимость установить правило (критерий), которое позволяло бы судить, является ли расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями случайным или значимым. Если расхождение окажется случайным, то считают, что данные наблюдений (выборки) согласуются с выдвинутой гипотезой о законе распределения генеральной совокупности и, следовательно, гипотезу принимают. Если же расхождение окажется значимым, то данные наблюдений не согласуются с гипотезой, и ее отвергают.

Критерием согласия называют критерий, который позволяет установить, является ли расхождение эмпирического и теоретического распределений случайным или значимым, т. е. согласуются ли данные наблюдений с выдвинутой статистической гипотезой или не согласуются.

Имеется несколько критериев согласия: критерий хи-квадрат (χ^2), или Пирсона, критерий Колмогорова, критерий Романовского и др.

Ограничимся описанием того, как критерий χ^2 применяется к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности (критерий применяется аналогично и для других распределений).

Допустим, что в результате n наблюдений получена выборка:

1) значение признака – $x_1, x_2, \dots, x_s$;

2) эмпирическая частота – $m_1, m_2, \dots, m_s$.

Выдвинем статистическую гипотезу: генеральная совокупность, из которой извлечена данная выборка, имеет нормальное распределение. Требуется установить, согласуется ли эмпирическое распределение с этой гипотезой. Предположим, что по формуле (87) вычислены теоретические частоты $n_1, n_2, \dots, n$. Обозначим χ_q^2 среднее арифметическое квадратов разностей между эмпирическими и теоретическими частотами, взвешенное по обратным величинам теоретических частот:

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i - n_i)^2}{n_i}. \tag{91}$$

Чем больше согласуются эмпирическое и теоретическое распределения, тем меньше различаются эмпирические и теоретические частоты и тем меньше значение χ_q^2. Отсюда следует, что χ_q^2 характеризует близость эмпирического и теоретического распределений. В разных опытах χ_q^2 принимает различные, наперед неизвестные значения, т. е. является случайной величиной. Плотность вероятности этого распределения (для выборки достаточно большого объема) не зависит от проверяемого закона распределения, а зависит от параметра k, называемого числом степеней свободы. При проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности $k = s - 3$, где s – число групп, на которые разбиты данные наблюдений. Существуют таблицы, в которых указана вероятность того, что в результате влияния случайных факторов величина χ^2 примет значение не меньше вычисленного по данным выборки χ_q^2.

Для определенности примем уровень значимости 0,01. Если вероятность, найденная по таблицам, окажется меньше 0,01, то это означает, что в результате влияния случайных причин наступило событие, которое практически невозможно. Таким образом, тот факт, что χ^2

приняло значение χ_q^2, нельзя объяснить случайными причинами. Его можно объяснить тем, что генеральная совокупность не распределена нормально и, значит, выдвинутая гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности должна быть отвергнута. Если вероятность, найденная по таблицам, превышает 0,01, то гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности согласуется с данными наблюдений и поэтому может быть принята. Полученные выводы распространяются и на другие уровни значимости.

На практике нужно, чтобы объем выборки был достаточно большим ($n \geq 50$) и чтобы каждая группа содержала не менее 5–8 значений признака.

Для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности требуется:

1) вычислить теоретические частоты по формуле (90);

2) вычислить χ_q^2 по формуле (91), где m_i и n_i – соответственно эмпирические и теоретические частоты;

3) вычислить число степеней свободы по формуле $k = s - 3$, где s – число групп, на которые разбита выборка;

4) выбрать уровень значимости;

5) найти по таблице по значениям k и χ_q^2 вероятность $P\{\chi^2 \geq \chi_q^2\}$.

Причем если эта вероятность меньше принятого уровня значимости, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергают; если вероятность больше уровня значимости, то гипотезу принимают.

Пример. Проверьте, согласуются ли данные выборки (таблица 31) со статистической гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности, из которой извлечена эта выборка.

Таблица 31 – **Вариационный ряд**

x_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55
m_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4

Решение

Определим выборочное среднее и выборочную дисперсию: $\bar{x}_{\hat{a}} = 34{,}7$, $D_{\hat{a}} = 7{,}38$. Вычислим теоретические частоты по формуле (90). Расчет сведем в таблицу 32.

Найдем χ_q^2. Для этого сначала вычислим число степеней свободы. Учитывая, что число групп выборки s = 9, k = 9 – 3 = 6 . Уровень значимости α примем равным 0,01. По таблице при k = 6 и $\chi_q^2 = 9$ находим вероятность P, равную 0,1 736; при $\chi_q^2 = 10$ P = 0,1 247. Используя линейную интерполяцию, получим приближенное значение искомой вероятности 0,16 > 0,01.

Таблица 32 – **Расчетная таблица**

x_i	m_i	$x_i - \bar{x}_{\hat{a}}$	t_i	$\varphi(t_i)$	n_i
15	6	–19,7	–2,67	0,0 113	3
20	13	–14,7	–1,99	0,0 551	14
25	38	–9,7	–1,31	0,1 691	42
30	74	–4,7	–0,63	0,3 271	82
35	106	0,3	0,05	0,3 984	99
40	85	5,3	0,73	0,3 056	76
45	30	10,3	1,41	0,1 476	37
50	10	15,3	2,09	0,0 449	11
55	4	20,3	2,77	0,0 086	2
–	$\sum m_i = 366$	–	–	–	$\sum n_i = 366$

Следовательно, данные наблюдения согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Тема 6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗЫ

Корреляционный анализ используют для определения степени связи между двумя случайными величинами X и Y.

Корреляционный анализ экспериментальных данных для двух случайных величин заключает в себе следующие основные приемы:

1) вычисление выборочных коэффициентов корреляции;

2) составление корреляционной таблицы;

3) проверку статистической гипотезы значимости связи.

Корреляционная зависимость между случайными величинами X и Y называется *линейной корреляцией*, если обе функции регрессии $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются линейными. В этом случае обе линии регрессии являются прямыми (они называются прямыми регрессии).

Для достаточно полного описания особенностей корреляционной зависимости между величинами недостаточно определить форму этой зависимости и в случае линейной зависимости оценить ее силу по величине коэффициента регрессии. Например, ясно, что корреляционная зависимость возраста Y учеников средней школы от года X их обучения в школе является, как правило, более тесной, чем аналогичная зависимость возраста студентов высшего учебного заведения от года обучения, поскольку среди студентов одного и того же года обучения обычно наблюдается больший разброс в возрасте, чем у школьников одного и того же класса.

Для оценки тесноты линейных корреляционных зависимостей между величинами X и Y по результатам выборочных наблюдений вводится понятие *выборочного коэффициента линейной корреляции* ($r_в$), определяемого по формуле

$$r_{\hat{a}} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_X \sigma_Y}, \tag{92}$$

где σ_X и σ_Y – выборочные средние квадратические отклонения величин X и Y, которые в свою очередь вычисляются по формулам

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}\,; \tag{93}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2}\,. \tag{94}$$

При этом

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_{x_i} x_j^2\,; \tag{95}$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_{y_i} y_j^2 \ . \tag{96}$$

Следует отметить, что основной смысл выборочного коэффициента линейной корреляции состоит в том, что он представляет собой эмпирическую (т. е. найденную по результатам наблюдений над величинами *X* и *Y*) оценку соответствующего генерального коэффициента линейной корреляции: $r = r_в$.

Принимая во внимание формулы

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = \frac{\sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}}{\sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2}}, \ r_{\hat{a}} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2\right)\left(\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2\right)}},$$

получим выборочное уравнение линейной регрессии *Y* на *X* следующего вида:

$$y - \overline{y} = r_{\hat{a}} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x - \overline{x}\right). \tag{97}$$

Аналогично можно записать выборочное уравнение линейной регрессии *X* на *Y*:

$$x - \overline{x} = r_{\hat{a}} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y - \overline{y}\right). \tag{98}$$

Выборочный коэффициент линейной корреляции характеризуется следующими *свойствами*:

1) Коэффициент корреляции двух величин, не связанных линейной корреляционной зависимостью, равен 0.

2) Коэффициент корреляции двух величин, связанных линейной корреляционной зависимостью, равен 1 в случае возрастающей зависимости и –1 в случае убывающей зависимости.

3) Абсолютная величина коэффициента корреляции двух величин, связанных линейной корреляционной зависимостью, удовлетворяет неравенству $0 < |r| < 1$. При этом коэффициент корреляции положите-

лен, если корреляционная зависимость возрастающая, и отрицателен, если корреляционная зависимость убывающая.

4) Чем ближе $|r|$ к 1, тем теснее прямолинейная корреляция между величинами Y, X.

По своему характеру корреляционная связь может быть прямой и обратной, а по силе – сильной, средней и слабой. Кроме того, связь может отсутствовать или быть полной (таблица 33).

Таблица 33 – **Сила и характер связи между параметрами**

Сила связи	Характер связи	
	Прямая связь (+)	Обратная связь (–)
Полная	1	–1
Сильная	От 0,7 до 1	От –0,7 до –1
Средняя	От 0,3 до 0,7	От –0,3 до –0,7
Слабая	От 0,3 до 0	От –0,3 до 0
Связь отсутствует	0	0

Пример. Изучалась зависимость между двумя величинами Y и X. Результаты наблюдений приведены в таблице 34 в виде двумерной выборки объема 11.

Таблица 34 – **Вариационный ряд**

X	68	37	50	53	75	66	52	65	74	65	54
Y	114	149	146	141	114	112	124	105	141	120	124

Выполните следующее:

1) Вычислите выборочный коэффициент корреляции.
2) Оцените характер и силу корреляционной зависимости.
3) Напишите уравнение линейной регрессии Y на X.

Решение

По формулам (95) и (96) находим:

$$\overline{x^2} = \frac{68^2 + 37^2 + 50^2 + 53^2 + 75^2 + 66^2 + 52^2 + 65^2 + 74^2 + 65^2 + 54^2}{11} =$$

$$= \frac{40\,829}{11} = 3\,711{,}73;$$

$$\overline{y^2} = \frac{114^2 + 149^2 + 146^2 + 141^2 + 114^2 + 112^2 + 124^2 + 105^2}{11} +$$

$$+ \frac{141^2 + 120^2 + 124^2}{11} = \frac{177\,992}{11} = 16181{,}09.$$

Далее вычислим значения $\overline{x}$ и $\overline{y}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{659}{11} = 59{,}91; \ \left(\overline{x}\right)^2 = 3\,589{,}21.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11} y_i = \frac{1\,390}{11} = 126{,}36; \ \left(\overline{y}\right)^2 = 15\,966{,}85.$$

Отсюда

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11} x_i y_i = \frac{82183}{11} = 7\,471{,}2.$$

Находим выборочный коэффициент корреляции:

$$r_{\hat{a}} = \frac{7\,471{,}2 - 59{,}91 \cdot 126{,}36}{\sqrt{(3\,711{,}73 - 3\,589{,}21)(16181{,}09 - 15\,966{,}85)}} =$$

$$= \frac{-99{,}03}{\sqrt{122{,}52 \cdot 214{,}24}} = -\frac{99{,}03}{162{,}01} = -0{,}61.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что рассматриваемая корреляционная зависимость между величинами X и Y является по характеру обратной, по силе – средней.

Уравнение линейной регрессии Y на X будет иметь вид:

$$y - 126{,}36 = -0{,}61 \cdot \frac{\sqrt{214{,}24}}{\sqrt{122{,}52}}(x - 59{,}91);$$

$$y = -0{,}8x + 174{,}59.$$

Тема 7. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

7.1. Виды дисперсии

В зависимости от того, как представлены статистические данные (единая совокупность или несколько совокупностей), различают такие виды дисперсии, как групповая, внутригрупповая, межгрупповая, общая.

Групповая дисперсия ($D_{j\,гр}$) измеряет вариацию признака внутри группы (выборки) и по своей сути является выборочной дисперсией для данной группы значений.

Групповая дисперсия отражает изменчивость, которая возникает только за счет причин, действующих внутри группы.

Внутригрупповая дисперсия ($D_{внгр}$) является средней из групповых дисперсий и отражает случайную вариацию признака, которая происходит под влиянием всех прочих факторов, за исключением фактора, положенного в основание группировки.

Межгрупповая дисперсия ($D_{межгр}$), или *дисперсия групповых средних*, характеризует систематическую вариацию признака, которая обусловлена влиянием фактора, положенного в основание группировки. Она равняется среднему квадрату отклонений групповых средних от общей средней.

Общая дисперсия ($D_{общ}$) измеряет вариацию признака по всей совокупности в целом под влиянием всех факторов, определяющих эту вариацию. Она равняется среднему квадрату отклонений отдельных значений от общей средней. Можно доказать, что общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий.

Формулы для расчета дисперсий представлены в таблице 35.

Таблица 35 – **Формулы для расчета дисперсий**

Вид дисперсии	Формула	Обозначения
Групповая	$D_{j\,\text{ãð}} = \dfrac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_j)^2}{N_j}$	n_i – частота значения x_i; j – номер группы; $N_j = \sum n_i$ – объем группы j; $N = \sum N_j$ – объем всей со-
Групповая средняя	$\overline{x}_j = \dfrac{\sum n_i x_i}{N_j}$	

Внутригрупповая	$D_{\text{âíãð}} = \dfrac{\sum N_j D_{j\,\text{ãð}}}{N}$	вокупности
Межгрупповая	$D_{\text{ìåæãð}} = \dfrac{\sum N_j (\overline{x}_j - \overline{x_{\text{îáù}}})^2}{N}$	
Общая	$D_{\text{îáù}} = \dfrac{\sum n_i (\overline{x}_i - \overline{x_{\text{îáù}}})^2}{N}$	
Общая средняя	$\overline{x}_{\text{îáù}} = \dfrac{\sum N_j \overline{x_j}}{N}$	

Пример 7.1. Выборочные измерения группы деталей производились одним и тем же контрольным прибором дважды за смену (таблица 36). Оцените точность прибора по данным эксперимента, включающим две выборки, и сделайте выводы по методике измерения.

Таблица 36 – **Вариационный ряд примера 7.1**

Первая серия	x_i, мкм	2	4	5	Вторая серия	x_i, мкм	3	8
	n_i	1	7	2		n_i	2	3

Решение

Поскольку совокупность состоит из двух групп (выборок), определим средние и дисперсии:

1) групповая средняя:

$$\overline{x}_1 = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 7 + 5\cdot 2}{10} = 4{,}0; \quad \overline{x}_2 = \frac{3\cdot 2 + 8\cdot 3}{5} = 6{,}0;$$

2) общая средняя:

$$\overline{x}_{\text{îáù}} = \frac{4\cdot 10 + 6\cdot 5}{15} = 4{,}67;$$

3) групповая дисперсия:

$$D_{\text{ãð1}} = \frac{1(2-4)^2 + 7(4-4)^2 + 2(5-4)^2}{10} = 0{,}6;$$

$$D_{\text{ãð2}} = \frac{2(3-6)^2 + 3(8-6)^2}{5} = 6{,}0;$$

4) внутригрупповая дисперсия:

$$D_{âíãð} = \frac{10 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 6{,}0}{15} = 2{,}4;$$

5) межгрупповая дисперсия:

$$D_{ìåæãð} = \frac{10(4 - 4{,}67)^2 + 5(6 - 4{,}67)^2}{15} = 0{,}89;$$

6) общая дисперсия:

$$D_{îáù} = \frac{1(2-4{,}67)^2 + 7(4-4{,}67)^2 + 2(5-4{,}67)^2 + 2(3-4{,}67)^2 + 3(8-4{,}67)^2}{15} = 3{,}29.$$

Так как доля межгрупповой дисперсии в общей дисперсии составляет 0,27 (0,89 : 3,29), т. е. 27%, то можно говорить о влиянии только случайных факторов на рассеяние значений. Методика измерений не содержит систематического фактора, влияющего на результаты контроля.

7.2. Дисперсионный анализ

Дисперсионный анализ предназначен для оценки влияния различных, но контролируемых факторов на результат эксперимента. Пусть результатом эксперимента является некоторая случайная величина Y, называемая также откликом. На значения случайной величины Y влияет фактор X, состоящий из n уровней. В зависимости от количества факторов, включенных в анализ, различают однофакторный, двухфакторный и многофакторный дисперсионный анализ.

Проведение дисперсионного анализа возможно, если результаты измерений являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения с одинаковыми дисперсиями. При однофакторном дисперсионном анализе выявляется степень влияния одного фактора X на математическое ожидание отклика $M(Y)$. Фактор может быть количественным (например, скорость резания, размер заготовки) или качественным (модель станка, марка инструментального материала и т. п.).

В процессе эксперимента фактор X поддерживают на n уровнях. На каждом уровне фактора проводится m дублирующих опытов. Значение m может быть одинаковым или разным для каждого из уровней.

Результаты всех измерений представляют в виде таблицы, которую называют матрицей наблюдений (таблица 37).

Вначале для каждой серии дублирующих опытов вычисляют средние арифметические μ_i, являющиеся оценками $M(Y_i)$, и дисперсии воспроизводимости $S^2_{\hat{a}_i}$.

Таблица 37 – **Матрица наблюдений**

Номер уровня фактора	Уровень фактора	Наблюдения	Число дублирующих опытов
1	X_1	$Y_{11}, Y_{12}, ..., Y_{1j}, ..., Y_{1m_1}$	m_1
…	…	…	…
i	X_i	$Y_{i1}, Y_{i2}, ..., Y_{ij}, ..., Y_{im_i}$	m_i
…	…	…	…
n	X_n	$Y_{n1}, Y_{n2}, ..., Y_{nj}, ..., Y_{nm_n}$	m_n
–	–	–	$N = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Затем проверяют однородность ряда дисперсий $S^2_{\hat{a}_i}$: попарно при помощи критерия Фишера (если m_i различны) или при помощи критерия Кочрена (если m_i постоянны). Для этого формулируют нулевую гипотезу: H_0: $D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_L)$. По выборкам одного объема определяют наблюдаемое значение критерия Кочрена:

$$G_{\text{íàáë}} = \frac{S^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{L} S_i^2}. \qquad (99)$$

Наблюдаемое значение критерия сравнивают с критической точкой правосторонней критической области $G_{кр}$ (α, k, L), где $k = m - 1$, и делают вывод об однородности дисперсий. Если дисперсии неоднородны, дальнейший анализ не проводится.

После подтверждения гипотезы об однородности дисперсий можно приступать к анализу. Полагают, что результат любого измерения (Y_{ij}) можно представить в виде модели:

$$Y_{ij} = \mu + F_i + \varepsilon_{ij} \ ,$$

где Y_{ij} – значение исследуемой переменной, полученной на i-м уровне фактора с j-м порядковым номером;

μ – общая средняя отклика Y;

F_i – эффект влияния фактора X_i на Y, т. е. отклонение средних значений μ_i на i-м уровне (групповых средних) от общей средней μ ($F_i = \mu_i - \mu$);

ε_{ij} – случайный остаток, отражающий влияние на величину Y_{ij} всех других неконтролируемых (неучтенных) факторов.

Основными допущениями дисперсионного анализа являются следующие:

1) остатки ε_{ij} взаимно независимы для любых i и j;

2) значения ε_{ij} подчинены нормальному закону.

Задача дисперсионного анализа состоит в оценке существенности влияния изменения уровня фактора. Рассеивание значений отклика, вызванное контролируемым фактором, оценивается факторной дисперсией (сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней) – $S^2_{ôàêò}(X)$.

Влияние неконтролируемых факторов (вклад ε_{ij}) можно оценить средней дисперсией воспроизводимости (остаточная дисперсия) – $S^2_{â}$.

Общее рассеивание значений отклика, вызванное как контролируемыми, так и неконтролируемыми факторами, оценивается общей (или полной) дисперсией (общая сумма квадратов отклонений) – $S^2_{îáù}$.

Дисперсии в дисперсионном анализе рассчитываются следующим образом:

1) средняя арифметическая групповая дисперсия:

$$\mu_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij} \ ;$$

2) общая средняя дисперсия:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i \ ;$$

3) дисперсия воспроизводимости (групповая):

$$S^2_{\hat{a}_i} = \frac{1}{m_i}\sum_{i=1}^{m_i} (Y_{ij} - \mu_i)^2 \ ;$$

4) факторная (межгрупповая) дисперсия:

$$S^2_{\text{ôàêò}}(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} m_i(\mu_i - \mu)^2 \ ;$$

5) остаточная (внутригрупповая) дисперсия:

$$S^2_{\hat{a}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S^2_{\hat{a}_i} \ ;$$

6) общая (полная) дисперсия:

$$S^2_{\text{îáù}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} (Y_{ij} - \mu)^2 \ .$$

Для выявления степени влияния фактора X и сопоставления ее с разбросом (вызванным случайными, неконтролируемыми причинами) проверяют однородность факторной дисперсии и дисперсии воспроизводимости (остаточной) по критерию Фишера: $F_{\text{íàáë}} = \dfrac{S^2_{\text{ôàêò}}}{S^2_{\hat{a}}}$. Наблюдаемое значение критерия сравнивают с критическим $F_{кр}(\alpha;\ k_1;\ k_2)$, которое находят по таблицам F-распределения для уровня значимости α, числа степеней свободы $k_1 = n - 1$ и $k_2 = N - n$.

Если $F_{набл} \leq F_{кр}(\alpha;\ k_1;\ k_2)$, то влияние фактора X несущественно. Следовательно, все полученные результаты измерений принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами μ и $S^2_{îáù}$.

При $F_{набл} > F_{кр}(\alpha;\ k_1;\ k_2)$ влияние фактора принимают существенным. Полагают, что в данном случае есть n нормально распределенных совокупностей, каждая из которых имеет соответствующее математическое ожидание μ_i и одну и ту же дисперсию $S^2_{\hat{a}}$. Оценка эффекта влияния i-го уровня фактора равна разности общей и групповой средних ($F_i = \mu_i - \mu$).

Предположим, что фактор X влияет на отклик Y. Для измерения степени этого влияния используют выборочный коэффициент детерминации $\left(\overline{d}\right)$, равный отношению дисперсий:

$$\overline{d} = \frac{S^2_{\hat{o}\grave{a}\hat{e}\grave{o}}\,(n-1)}{S^2_{îáù}\,(N-n)} = \frac{S^2_{\hat{o}\grave{a}\hat{e}\grave{o}}\,(n-1)}{S^2_{\hat{o}\grave{a}\hat{e}\grave{o}}\,(n-1) + S^2_{\hat{a}}n}\,. \qquad (100)$$

Выборочный коэффициент детерминации показывает, какую долю выборочной общей дисперсии составляет факторная дисперсия (групповых средних), т. е. какая доля общей дисперсии объясняется зависимостью отклика Y от фактора X.

Пример 7.2. Оцените качество пяти марок смазочно-охлаждающих жидкостей, используемых для бесцентрового шлифования. Критерием качества выбрана шероховатость деталей, прошлифованных при одинаковых режимах. Результаты опытов приведены в матрице наблюдений (таблица 38).

Таблица 38 – **Матрица наблюдений примера 7.2**

Марка	Уровень фактора	Y_{ij}, мкм						μ_i, мкм	S_i^2, мкм^2	$(\mu_i - \mu)^2$, мкм^2
		1	2	3	4	5	6			
1-я	X_1	0,72	0,60	0,65	0,32	0,80	0,52	0,602	0,028	0,000
2-я	X_2	0,15	0,62	0,22	0,40	0,25	0,30	0,323	0,028	0,450
3-я	X_3	0,45	0,30	0,50	0,58	0,48	0,32	0,438	0,012	0,150
4-я	X_4	1,20	0,92	0,72	0,80	1,00	0,80	0,907	0,031	0,582
5-я	X_5	0,58	0,90	0,70	1,00	0,48	0,60	0,710	0,040	0,078

–	$\mu =$ $= 0{,}596$	$S_{\hat{a}}^2 =$ $= 0{,}027$	$S_{\hat{o}\grave{a}\hat{e}\grave{o}}^2 =$ $= 0{,}315$

Решение

Однородность дисперсий проверяем по критерию Кочрена:

$G_{\acute{\imath}\grave{a}\acute{a}\ddot{e}} = \dfrac{0{,}04}{0{,}139} = 0{,}29 < G_{\hat{e}\eth}(0{,}05;\,5;\,5) = 0{,}5\,063$, т. е. дисперсии однородны.

Наблюдаемое значение по критерию Фишера равно:

$$F_{\acute{\imath}\grave{a}\acute{a}\ddot{e}} = \frac{0{,}315}{0{,}027} = 11{,}67\,.$$

Критическое значение критерия $F_{кр}(\alpha;\, k_1;\, k_2)$ находим по таблицам F-распределения для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$, числа степеней свободы $k_1 = n - 1 = 4$ и $k_2 = N - n = 25$, $F_{кр}(0{,}05;\, 4;\, 25) = 2{,}74$.

Поскольку $F_{набл} = 11{,}67 > F_{кр} = 2{,}74$, то нулевую гипотезу отклоняем: изменение шероховатости детали при изменении марки смазочно-охлаждающей жидкости следует считать значимым.

Степень этого влияния характеризуется выборочным коэффициентом детерминации:

$$\bar{d} = \frac{0{,}315 \cdot 4}{0{,}315 \cdot 4 + 0{,}027 \cdot 5} = 0{,}90\,.$$

Это означает, что 90% общей вариации шероховатости деталей связано с маркой применяемой смазочно-охлаждающей жидкости.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1

Решите задачи по вариантам.

1.1. В хоккейном турнире участвует 6 команд. Каждая команда должна сыграть поочередно с другими по одной игре. Определите, сколько игр сыграно в турнире.

1.2. Фирма нуждается в организации четырех новых складов. Ее сотрудники подобрали 8 одинаково удобных помещений. Вычислите, сколько существует способов отбора четырех помещений из восьми в случайном порядке.

1.3. Руководство фирмы выделило отделу рекламы средства для размещения в печати объявлений о предлагаемых фирмой товарах и услугах. По расчетам отдела рекламы выделенных средств хватит для того, чтобы поместить объявления только в 15 из 25 городских газет. Вычислите, сколько существует способов случайного отбора газет для размещения этих объявлений.

1.4. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных (из них 7 женщин, остальные мужчины), состоящих на учете в службе занятости. Найдите вероятность того, что из девяти случайно отобранных безработных окажется 5 женщин.

1.5. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ремонт». Карточки с буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Определите вероятность получения при этом слова «море».

1.6. Телефонный номер в г. Гомеле состоит из шести цифр. Найдите вероятность того, что все цифры телефонного номера наудачу выбранного абонента различны.

1.7. Студент из 80 вопросов к экзамену выучил 75. В каждом билете по 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент знает все 3 вопроса.

1.8. Ревизору нужно за определенный период времени проверить 100 предприятий. Известно, что одно из предприятий составляет неправильные бухгалтерские отчетности, получая скрытые доходы. За I квартал ревизор осуществил проверку на 10 предприятиях. Найдите вероятность того, что среди 10 проверенных предприятий окажется такое, которое ведет неправильные бухгалтерские отчетности.

1.9. Фирма заключила 30 сделок по продаже товара. У шести покупателей есть нарушения в регистрационных документах. Представитель налоговой инспекции извлекает наудачу 5 договоров о продаже товара. Найдите вероятность того, что регистрационные документы у покупателей окажутся правильно оформленными.

1.10. На столе в беспорядке находится 15 ведомостей, среди которых 10 непроверенных. Бухгалтер наудачу извлекает 3 ведомости. Найдите вероятность того, что извлеченные документы окажутся непроверенными.

1.11. Из партии втулок, изготовленных за смену токарем, случайным образом отбирается для контроля 10 шт. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей 2 втулки будут второго сорта, если во всей партии насчитывается 25 втулок первого сорта и 5 – второго.

1.12. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находится и 2 известных вам магазина. Найдите вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены.

1.13. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «песня». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что у него снова получилось слово «песня».

1.14. Из 20 акционерных обществ 4 являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции шести акционерных обществ. Найдите вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов.

1.15. Группа спортсменов состоит из семи лыжников и трех конькобежцев. Из нее случайным образом выделены 3 спортсмена. Найдите вероятность того, что все выбранные спортсмены окажутся лыжниками.

1.16. В партии из 15 однотипных стиральных машин 5 машин изготовлено на заводе А, а 10 – на заводе В. Случайным образом отобрано 5 машин. Найдите вероятность того, что две из них изготовлены на заводе А.

1.17. На полке помещены 6 радиоламп, из которых две негодные. Случайным образом отбираются 2 радиолампы. Определите вероятность того, что они годны для использования.

1.18. На склад привезли 50 ящиков комплектующих изделий для одного из видов ЭВМ. Но среди них оказалось 4 ящика комплектующих для другого вида ЭВМ. Наудачу взяли 6 ящиков. Найдите вероятность того, что в одном из этих шести ящиков окажутся некомплектные детали.

1.19. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: 4 ящика – с первого склада, 5 – со второго склада, 7 – с третьего склада и 4 ящика – с четвертого склада. Случайным образом выбран ящик для продажи. Найдите вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

1.20. В запасе ремонтной мастерской насчитывается 10 поршневых колец, 3 из них восстановленные. Определите вероятность того, что среди трех, взятых наугад колец, 2 окажутся восстановленными.

1.21. В городе функционирует 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны 3 магазина. Найдите вероятность того, что все эти магазины будут непродовольственные.

1.22. В районе насчитывается 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны 2 поселка. Определите вероятность того, что в них окажутся пункты проката.

1.23. Собрание, на котором присутствует 25 чел., в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран, найдите вероятность того, что в делегацию войдут две женщины и один мужчина.

1.24. Из пруда, в котором плавает 40 щук, выловили 5 щук, пометили их и пустили обратно в пруд. Во второй раз выловили 9 щук. Определите вероятность того, что среди них окажется только две помеченные щуки.

1.25. Бригада состоит из четырех женщин и трех мужчин. Среди членов бригады разыгрывается 4 билета в театр. Найдите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две женщины и двое мужчин.

1.26. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Найдите вероятность того, что среди пяти наудачу взятых билетов один будет выигрышный.

1.27. В урне находится 3 белых и 7 черных шаров. Найдите вероятность того, что извлеченные наугад 2 шара окажутся черными.

1.28. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер берет 5 телевизоров. Найдите вероятность того, что 2 из них нуждаются в настройке.

1.29. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 пар коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 8 пар сапог. Найдите вероятность того, что все выбранные сапоги черного цвета.

1.30. В партии, включающей 20 радиоприемников, 5 оказалось неисправных. Наугад берут 3 радиоприемника. Определите вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника.

Задание 2

Решите задачи по вариантам.

2.1. На стеллажах в библиотеке в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь наудачу берет 3 учебника. Найдите вероятность того, что: а) хотя бы 1 из взятых учебников окажется в переплете; б) 2 учебника окажутся в переплете; в) только 1 учебник в переплете.

2.2. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из трех центральных телеканалов, равна 0,05. Предполагается, что эти события независимы в совокупности. Определите вероятность того, что потребитель увидит рекламу: а) по всем трем каналам; б) хотя бы по одному из этих каналов.

2.3. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент из трех предложенных экзаменатором вопросов знает: а) 3 вопроса; б) хотя бы 2 вопроса; в) хотя бы 1 вопрос.

2.4. Покупатель может приобрести акции двух компаний. Надежность первой компании оценивается экспертами на уровне 90%, а второй – 80%. Найдите вероятность того, что: а) обе компании в течение года не станут банкротами; б) хотя бы одна компании обанкротится.

2.5. В городе функционирует 3 коммерческих банка, оценки надежности которых составляют соответственно 0,95; 0,9 и 0,85. В связи с определением хозяйственных перспектив развития города администрацию интересует вопрос, какова вероятность того, что в течение года: а) обанкротятся все 3 банка; б) обанкротятся 2 банка.

2.6. Концерн состоит из трех независимо работающих заводов. Эти заводы работают в течение времени T без убытков с вероятностями соответственно 0,851, 0,751 и 0,701. Найдите вероятность того, что за время T с убытками будет работать: а) только 1 завод; б) хотя бы 1 завод.

2.7. Вероятность увеличения потребительского спроса на изделия фирмы в будущем году оценивают в 0,7. Если эта оценка оправдается, то с вероятностью 0,8 возрастет объем продаж фирмы. Если же она не оправдается, то вероятность расширения продаж составит 0,5. Найдите вероятность: а) роста потребительского спроса и объема продаж; б) ситуации, при которой нет одновременного увеличения как потребительского спроса, так и объема продаж.

2.8. Известны значения вероятности дополнительных потребностей фирмы в инженерах на предстоящие 2 года (таблица 39).

Таблица 39 – **Вероятности дополнительных потребностей фирмы в инженерах на предстоящие 2 года**

Число инженеров	Менее 100	100–199	200–299	300–399	400–499	Более 500
Вероятность	0,1	0,15	0,3	0,3	0,1	0,05

Найдите вероятность того, что на протяжении двух предстоящих лет фирме дополнительно потребуется: а) 400 и более инженеров; б) по меньшей мере 200, но не более 399 инженеров.

2.9. Блок состоит из трех радиоламп. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны 0,3; 0,2; 0,4. Определите вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы 1 радиолампа.

2.10. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, будет высшего сорта, равна 0,9, второго сорта – 0,7, третьего сорта – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найдите вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего сорта; б) две высшего сорта; в) хотя бы одна высшего сорта.

2.11. Первый рабочий изготавливает 40% изделий второго сорта, а второй – 30%. У каждого рабочего взято наугад по 2 изделия. Найдите вероятность того, что: а) все 4 изделия второго сорта; б) хотя бы 3 изделия второго сорта; в) менее трех изделий второго сорта.

2.12. В первом ящике находится 20 деталей, 15 из них стандартные. Во втором ящике насчитывается 30 деталей, 25 их них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Определите вероятность того, что: а) обе детали стандартные; б) хотя бы одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные.

2.13. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка № 1 составляет 1%, для станка № 2 – 4%. С каждого станка взяли по одной детали. Найдите вероятность того, что: а) обе детали стандартные; б) одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные.

2.14. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй экзамен – 0,7, третий экзамен – 0,6. Вычислите вероятность того, что студент сдаст: а) 2 экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) не более двух экзаменов.

2.15. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Найдите вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы 1 раз; б) 2 раза; в) только 1 раз.

2.16. Для аварийной сигнализации установлено 2 независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй – 0,7. Найдите вероятность того, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) не сработает ни один сигнализатор; в) сработает хотя бы 1 сигнализатор.

2.17. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5. Сделано по одному выстрелу. Найдите вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель.

2.18. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Найдите вероятность того, что при одном цикле обзора корабль: а) будет обнаружен тремя станциями; б) будет обнаружен не менее чем двумя станциями; в) не будет обнаружен ни одной станцией.

2.19. В ящике находится 50% деталей, изготовленных на заводе № 1, 20% – на заводе № 2 и 30% – на заводе № 3. Наугад было взято 3 детали. Найдите вероятность того, что: а) все детали с завода № 1; б) две детали с завода № 1; в) все 3 детали с разных заводов.

2.20. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6. Вычислите вероятность успешного преодоления: а) трех препятствий; б) не менее двух препятствий; в) двух препятствий.

2.21. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, четвертого – 0,4. Найдите вероятность того, что в течение времени T проработают: а) 4 блока; б) 3 блока; в) не менее трех блоков.

2.22. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, второй – 0,2 и третий – 0,3. Найдите вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) не менее двух станков; б) 2 станка; в) 3 станка.

2.23. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по два билета каждого выпуска. Найдите вероятность того, что выигрышными окажутся: а) 3 билета; б) не менее трех билетов; в) менее трех билетов.

2.24. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, будет высшего качества, равна 0,7, вторым рабочим – 0,8, третьим рабочим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Вычислите вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) 2 подшипника; в) хотя бы 1 подшипник.

2.25. В первой коробке находится 20 деталей, из них 13 стандартных; во второй коробке – 30 деталей, из них 26 стандартных. Из каждой коробки наугад берут по одной детали. Найдите вероятность того, что: а) обе детали окажутся нестандартными; б) одна деталь нестандартная; в) обе детали стандартные.

2.26. В цехе имеется 3 резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен равна соответственно 0,2; 0,3; 0,1. Найдите вероятность того, что включены: а) 2 электродвигателя; б) хотя бы 1 электродвигатель; в) 3 электродвигателя.

2.27. На сборку поступают детали с трех станков с числовым программным управлением. Первый станок дает 20%, второй – 30%, третий – 50% однотипных деталей, поступающих на сборку. Найдите вероятность того, что из трех наугад взятых деталей: а) 3 будут с разных станков; б) 3 будут с третьего станка; в) две будут с третьего станка.

2.28. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,7, вторым стрелком – 0,5. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Найдите вероятность того, что цель будет поражена: а) двумя стрелками; б) хотя бы одним стрелком; в) только одним стрелком.

2.29. Первый станок-автомат дает 1% брака, второй – 1,5%, а третий – 2%. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Вычислите вероятность того, что стандартными окажутся: а) 3 детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь.

2.30. Три команды спортивного общества А состязаются с тремя командами общества В. Вероятности выигрыша первой, второй и третьей команд из общества А у соответствующих команд из общества В равны 0,7; 0,6; 0,4. Команды провели по одной встрече. Найдите вероятность того, что команды общества А выиграют: а) две встречи; б) хотя бы две встречи; в) 3 встречи.

Задание 3

Решите задачи по вариантам.

3.1. На фабрике на машинах А, В, С производят соответственно 25, 35 и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Вычислите вероятность того, что случайно выбранное изделие фабрики дефектно.

Пусть известно, что случайно выбранное изделие оказалось дефектным. Найдите вероятность того, что оно было произведено на машинах соответственно А, В, С.

3.2. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок производит выстрел по мишени. Вычислите вероятность того, что произойдет попадание.

Известно, что стрелок попал в мишень. Найдите вероятность того, что он принадлежит к первой группе стрелков, попадающих с вероятностью 0,8.

3.3. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнить норму мастера спорта равны для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Найдите вероятность того, что: а) наугад выбранный студент выполнит норму матера спорта; б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе.

3.4. На сортировочную станцию прибывают полувагоны, платформы и крытые вагоны с вероятностями соответственно 0,25; 0,3 и 0,45. Вероятность неисправности полувагона равна 0,02, платформы – 0,015, крытого вагона – 0,01. Найдите вероятность того, что поступивший на осмотр вагон окажется неисправным.

Пусть поступившее на осмотр транспортное средство оказалось неисправным. Вычислите вероятность того, что это платформа.

3.5. Электролампы изготавливаются на двух заводах. Первый завод производит 60% от общего количества электроламп, второй – 40%. Известно, что 70% продукции первого завода и 80% второго являются изделиями высшего качества. В магазин поступает продукция обоих заводов. Найдите вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется высшего сорта.

Пусть купленная лампа оказалась высшего сорта. Вычислите вероятность того, что она изготовлена на первом заводе.

3.6. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы: в первой – 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных. Найдите вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию.

Пусть наугад взятый конденсатор оказался годным. Определите, из какой коробки он вероятнее всего взят.

3.7. Самолет может выполнять задания на больших, средних и малых высотах, причем на больших высотах предполагается совершить 25% всех полетов, на средних – 10 и на малых – 65%. Вероятности выхода самолета на заданный объект на больших, средних и малых высотах равны соответственно 0,75; 0,9; 0,95. Определите вероятность выхода самолета на заданный объект.

Известно, что самолет вышел на заданный объект. Найдите вероятность того, что полет происходил на малой высоте.

3.8. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 50% случаев работы прибора, форсированный – в 30 и недогруженный – в 20%. Надежность прибора (вероятность безотказной работы в течение заданного времени T) для нормального режима равна 0,8, для форсированного – 0,5, для недогруженного – 0,9. Найдите полную надежность прибора.

Прибор проработал безотказно в течение времени T. Определите вероятность того, что он работал в форсированном режиме.

3.9. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с 20 шарами в каждом – по 4 красных шара. Найдите вероятность того, что: а) из наугад выбранного ящика взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков.

3.10. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 20% изделий от всего объема их производства, на второй – 30, на третьей – 50%. Каждая из линий характеризуется следующими процентами годности изделий: 95; 98 и 97. Определите вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

Пусть выбранное наугад изделие оказалось бракованным. Определите, на какой линии оно скорее всего изготовлено.

3.11. В канцелярии работают 4 секретаря, которые обрабатывают по 40, 10, 30 и 20% исходящих документов за одно и то же время. Вероятности неверной адресации документов секретарями равны соответственно 0,01; 0,04; 0,06; 0,02. Найдите вероятность того, что наугад выбранный исходящий из канцелярии документ будет неверно адресован.

Определите вероятность того, что документ, оказавшийся неверно адресованным, отправлен третьим секретарем.

3.12. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 – второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найдите вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произошло сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошел сбой, – первого типа.

3.13. Сообщение может передаваться по одному из десяти каналов связи, 2 из которых находятся в отличном состоянии, 5 – в хорошем и 3 – в посредственном. Вероятности правильной передачи сообщения для каналов указанных видов равны, соответственно 0,95; 0,9; 0,7. По выбранному наугад каналу передано сообщение. Найдите вероятность того, что оно будет передано без искажений.

Пусть посланное сообщение передано без искажений. Вычислите вероятность того, что оно посылалось по каналам, находящимся в хорошем состоянии.

3.14. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 кинескопов второго типа. Вероятности выдержать гарантийный срок для кинескопов первого и второго типов равны соответственно 0,9 и 0,6. Найдите вероятность того, что выбранный наугад кинескоп выдержит гарантийный срок.

Пусть выбранный наугад кинескоп выдержал гарантийный срок. Определите вероятность того, что это был кинескоп первого типа.

3.15. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, в два раза больше, чем на станке № 2. Найдите вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

3.16. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, равными соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Вероятность получения бракованной продукции при обработке на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01. Определите вероятность того, что случайно выбранная после обработки деталь стандартная.

Пусть случайно выбранная деталь оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что она обрабатывалась на втором станке.

3.17. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, вертолет второго типа – с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что выбранный наугад вертолет обнаружит аппарат.

Известно, что вертолет обнаружил спускаемый аппарат. Найдите вероятность того, что это был вертолет второго типа.

3.18. Комплектовщик получает для сборки 30% деталей с завода № 1, 20% – с завода № 2, остальные – с завода № 3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 будет высшего качества, равна 0,9, деталь с завода № 2 – 0,8, деталь с завода № 3 – 0,6. Найдите вероятность того, что: а) случайно взятая деталь высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе № 2.

3.19. По линии связи могут передаваться сигналы типа A и B с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60% сигналов типа A и 70% – типа B. По линии связи передается один сигнал. Найдите вероятность того, что этот сигнал будет принят.

Известно, что переданный сигнал принят. Определите вероятность того, что это был сигнал типа A.

3.20. Радиолокационная станция ведет наблюдения за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помехи, то он обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью 0,8; если применяет помехи – то с вероятностью 0,4. Известно, что объект применяет помехи в 70% случаев работы. Найдите вероятность обнаружения объекта радиолокационной станцией.

Известно, что объект обнаружен радиолокационной станцией. Определите вероятность того, что это произошло при применении объектом помех.

3.21. Три автомата изготавливают однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата будет высшего качества, равна 0,8, со второго – 0,6, с третьего – 0,7. Найдите вероятность того, что: а) наугад взятая деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

3.22. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 – второго. Гарантийный срок обычно выдерживает 80% радиоламп первого типа и 90% – второго. Найдите вероятность того, что выбранная наугад в составе блока радиолампа выдержит гарантийный срок. Определите вероятность того, что радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа.

3.23. 40% приборов собирается из высококачественных деталей, остальные – из деталей обычного качества. В первом случае надежность прибора (вероятность безотказной работы за время T) равна 0,9. Если прибор собран из обычных деталей, то его надежность равна 0,6. Вычислите надежность наугад выбранного прибора.

Прибор в течение времени T работал безотказно. Найдите вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

3.24. Среди поступивших на сборку деталей 30% с завода № 1, остальные – с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна – 0,02, для завода № 2 – 0,03. Найдите вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная.

Определите вероятность изготовления наугад взятой стандартной детали на заводе № 1.

3.25. В тире имеется 5 ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определите вероятность поражения мишени выстрелом из наугад выбранного ружья.

Пусть выстрелом из наугад взятого ружья мишень поражена. Вычислите вероятность того, что это было ружье, вероятность попадания из которого равна 0,9.

3.26. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, равны соответственно 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, для индикатора второго типа – 0,7. Найдите вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии.

Известно, что индикатор сработал. Определите, к какому типу он вероятнее всего принадлежит.

3.27. Двадцать процентов приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей равна 0,9, интегральных схем – 0,8. Найдите: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что исправный прибор с микромодулем.

3.28. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность получения бракованной продукции составляет 0,02, для второго станка эта вероятность равна 0,03. Найдите вероятность того, что выбранное случайным образом после обработки изделие окажется стандартным.

Пусть наугад взятое после обработки изделие оказалось стандартным. Вычислите вероятность того, что оно обрабатывалось на первом станке.

3.29. Пассажир может обратиться за получением билета на одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6; для касс вокзала B эта вероятность равна 0,5. Найдите вероятность того, что пассажир сможет купить билет в наугад выбранной кассе.

Известно, что пассажир приобрел билет. Вычислите вероятность того, что он куплен в кассе вокзала A.

3.30. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, равными соответственно 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01. Найдите: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки деталь стандартная; б) вероятность обработки наугад взятой стандартной детали на втором станке.

Задание 4

Решите задачи по вариантам.

4.1. Вася выигрывает у Пети в среднем 3 партии из четырех. Найдите вероятность того, что он выиграет: а) 3 из четырех сыгранных партий; б) не менее трех партий из четырех сыгранных.

4.2. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Найдите вероятность того, что из восьми случайно взятых в этом месяце дней дождливыми окажутся: а) 3 дня; б) не более трех дней.

4.3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки равна 0,3. Произведено 6 выстрелов. Найдите вероятность того, что произошло: а) 3 попадания в цель; б) не менее пяти попаданий.

4.4. При передаче сообщения вероятность искажения каждого знака равна 0,1. Найдите вероятность того, что сообщение из десяти знаков: а) не будет искажено; б) содержит не более трех искажений.

4.5. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность получения брака при формовке равна 0,1. Вычислите вероятность того, что среди восьми диодов, проверяемых отделом технического контроля, окажется: а) 2 бракованных; б) не более двух бракованных.

4.6. Вероятность потопить судно одной торпедой равна 0,2. Выпущено 5 торпед. Найдите вероятность того, что имеет место: а) 3 попадания в судно; б) не менее трех попаданий.

4.7. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найдите вероятность успешной сдачи: а) только трех экзаменов; б) не менее двух экзаменов.

4.8. Вероятность поражения мишени данным стрелком при одном выстреле в среднем составляет 80%. Стрелок производит 6 выстрелов. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена: а) 5 раз; б) не менее пяти раз.

4.9. Вероятность поражения цели каждым из семи выстрелов равна 0,8. Определите вероятность поражения цели: а) двумя выстрелами; б) хотя бы одним выстрелом.

4.10. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4% не удовлетворяют требованиям стандарта. Найдите вероятность того, что среди шести заготовок, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют: а) не более двух; б) две заготовки.

4.11. В партии хлопка присутствует около 20% коротких волокон. Найдите вероятность того, что при случайном отборе десяти волокон число коротких будет: а) равно 3; б) не более трех.

4.12. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8. Найдите вероятность того, что из шести изделий контроль пройдут: а) 5 изделий; б) не менее пяти изделий.

4.13. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Найдите вероятность того, что из девяти посеянных семян взойдут: а) 7 семян; б) более семи.

4.14. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Произведено 7 выстрелов. Найдите вероятность того, что имело место: а) 6 поражений цели; б) не более шести поражений.

4.15. Продукция, поступающая из цеха в отдел технического контроля, не удовлетворяет условиям стандарта в среднем в восьми процентах случаев. Найдите вероятность того, что из наугад взятых семи изделий не удовлетворяют условиям стандарта: а) 6 изделий; б) не менее шести изделий.

4.16. Контрольное задание состоит из пяти вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответов. Найдите вероятность того, что учащийся, не знающий ответов ни на один из вопросов и выбирающий их наугад, даст: а) 3 правильных ответа; б) не менее трех правильных ответов.

4.17. При игре с определенным противником вероятность выигрыша в каждой шахматной партии для данного игрока равна 0,5. Вычислите вероятность того, что он выиграет у противника в серии из шести партий: а) хотя бы 1 раз; б) 3 раза.

4.18. После зубофрезеровки шестерен у рабочего в среднем получается 20% нестандартных шестерен. Найдите вероятность того, что среди взятых шести шестерен нестандартных будет: а) 3; б) не более трех.

4.19. В результате наблюдений, продолжавшихся многие годы, установлено, что на каждую тысячу новорожденных приходится в среднем 515 мальчиков и 485 девочек. В отдельно взятой семье шестеро детей. Найдите вероятность того, что среди них: а) 3 девочки; б) не менее двух девочек.

4.20. Контрольное задание состоит из десяти вопросов, предусматривающих ответы «да» или «нет». Предположим, учащийся не знает ответ ни на один из вопросов и выбирает ответы наугад. Определите вероятность того, что он даст: а) не менее восьми правильных ответов, необходимых для зачета задания; б) только 6 правильных ответов.

4.21. Оптовая база обслуживает 6 магазинов. Вероятность получения заявки базой на данный день для каждого из магазинов равна 0,6. Найдите вероятность того, что в этот день будет: а) 5 заявок; б) не менее пяти заявок.

4.22. Вероятность того, что изделие успешно пройдет контроль, равна 0,8. Найдите вероятность того, что из шести выбранных наугад изделий контроль пройдут: а) не менее пяти изделий; б) не более пяти изделий.

4.23. Транзисторный радиоприемник смонтирован на девяти полупроводниках, для каждого из которых вероятность наличия брака равна 0,05. Вычислите вероятность того, что: а) хотя бы один из полупроводников будет бракованным; б) приемник будет содержать не менее двух бракованных полупроводников.

4.24. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80% высшего сорта. Найдите вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы 4 высшего сорта; б) 4 высшего сорта.

4.25. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 4% бракованных. Найдите вероятность того, что среди взятых на контроль пяти деталей окажутся: а) две бракованные; б) не более одной бракованной.

4.26. Волокна хлопка определенного сорта в среднем на 75% имеют длину, меньшую 45 мм, и на 25% – большую или равную 45 мм. Наугад выбираются 10 волокон. Найдите вероятность того, что среди выбранных волокон: а) не менее трех имеют длину, большую или равную 45 мм; б) не более одного волокна имеет длину большую чем 45 мм.

4.27. В телеателье имеется 7 телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6. Вычислите вероятность того, что в данный момент включены: а) 4 телевизора; б) хотя бы 1 телевизор.

4.28. При штамповке изделий бывает в среднем 20% брака. Для контроля отобрано 8 изделий. Найдите вероятность того, что: а) не менее двух изделий окажутся бракованными; б) только 1 изделие бракованное.

4.29. В автопарке предприятия имеется 12 автомашин. Известно, что для каждого из автомобилей вероятность работы без простоев из-за ремонта в течение месяца равна 0,7. Найдите вероятность того, что в течение ближайшего месяца проработают без простоев: а) не менее десяти машин; б) не более двух машин.

4.30. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найдите вероятность того, что экзамен сдадут: а) 5 студентов; б) не менее пяти студентов.

Задание 5

Решите задачи по вариантам.

5.1. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская фирма предлагает 100 акций этой компании. Найдите вероятность того, что будет продано: а) не менее 70 и не более 85 акций; б) не более 69 акций.

5.2. Страховая компания изучает вероятность дорожных происшествий для юношей, имеющих мотоциклы. Было установлено, что вероятность попасть в дорожно-транспортное происшествие для юноши в течение года равна 0,35. Вычислите вероятность того, что из имеющих мотоцикл 700 юношей в ДТП попадут: а) 270 юношей; б) более чем 230 и менее чем 270 юношей.

5.3. Вероятность появления события в каждом из 2 100 независимых испытаний равна 0,7. Найдите вероятность того, что событие наступит: а) не менее 1 470 раз и не более 1 500 раз; б) ровно 120 раз.

5.4. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Найдите вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец: а) окажется равным 240; б) будет заключено между 225 и 250.

5.5. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,85. Найдите вероятность того, что из 500 высеянных семян взойдет: а) 425 семян; б) от 425 до 450 семян.

5.6. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12. Вычислите вероятность того, что из 460 наблюдаемых телевизоров: а) более 360 выдержат гарантийный срок; б) 400 будут работать без сбоя.

5.7. Известно, что при посадке приживается 80% деревьев определенного вида. Найдите вероятность того, что из 400 посаженных деревьев: а) приживутся ровно 300; б) приживутся не менее 300.

5.8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что в серии из 100 выстрелов мишень будет поражена: а) ровно 90 раз; б) не менее 75 раз.

5.9. Вероятность появления события в каждом из 2 000 независимых испытаний равна 0,7. Вычислите вероятность того, что событие наступит: а) не менее 1 500 раз; б) ровно 1 000 раз.

5.10. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найдите вероятность того, что среди 1 000 рождающихся детей: а) будет ровно половина мальчиков; б) мальчиков будет не менее 500 и не более 550.

5.11. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найдите вероятность того, что среди 900 посаженных семян число проросших: а) будет равно 800; б) будет принадлежать не менее 790 и не более 830.

5.12. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,85. Найдите вероятность того, что при 50 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 35 раз; б) 40 раз.

5.13. Прядильщица обслуживает 1 000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,4. Найдите вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет: а) на 60 веретенах; б) не менее чем на 50 веретенах.

5.14. Вероятность отклонений от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,02. Найдите вероятность наличия в партии из 200 клемм: а) ровно 50 клемм, не соответствующих стандарту; б) не более 40 нестандартных клемм.

5.15. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Вычислите вероятность того, что число проросших семян: а) больше 400; б) ровно 500.

5.16. Вероятность того, что взятая из изготовленной партии пара обуви окажется высшего сорта, равна 0,4. На контроль поступило 600 пар обуви. Найдите вероятность того, что число пар обуви высшего сорта будет: а) от 228 до 252 включительно; б) ровно 300.

5.17. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность поражения мишени: а) 75 раз в серии из 100 выстрелов; б) не менее 75 раз при 100 выстрелах.

5.18. Прядильщица обслуживает 2 000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,04. Вычислите вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет: а) на 100 веретенах; б) не более, чем на 150 веретенах.

5.19. Вероятность остановки в течение часа каждой из 100 работающих машин равна 0,2. Найдите вероятность остановки в течение ближайшего часа работы: а) 30 машин; б) не менее 20 машин.

5.20. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех независимо от других искажается с вероятностью 0,2. Определите вероятность того, что в переданной последовательности из 1 000 знаков: а) будет не менее 100 искажений; б) число искажений будет не более 200.

5.21. Вероятность того, что изделие высшего сорта, равна 0,5. Найдите вероятность того, что из 1 000 изделий: а) 500 высшего сорта;
б) не менее 300 высшего сорта.

5.22. Промышленная телевизионная установка содержит 2 000 транзисторов. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из транзисторов равна 0,05. Найдите вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока: а) хотя бы одного транзистора; б) не менее 30 транзисторов.

5.23. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,2. Проверяется книга, содержащая 500 страниц. Вычислите вероятность того, что с отпечатками окажутся: а) 50 страниц; б) не более 50 страниц.

5.24. Автоматическая штамповка клемм для предохранителей дает 10% отклонений от принятого стандарта. Найдите вероятность того, что среди 400 клемм стандартных будет: а) ровно 90 клемм; б) не менее 100 клемм.

5.25. Двадцать процентов изготавливаемых на заводе кинескопов для телевизоров не выдерживают гарантийный срок службы. Найдите вероятность того, что в партии из 600 кинескопов число не выдержавших этот срок: а) будет равно 115; б) будет заключено в промежутке между 100 и 125.

5.26. На заводе работают 500 человек. Для каждого из рабочих вероятность невыхода из-за болезни в определенный день равна 0,1. Найдите вероятность того, что: а) число отсутствующих будет не более 40; б) будут отсутствовать 50 человек.

5.27. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Вычислите вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет: а) заключено между 790 и 830; б) ровно 800.

5.28. Мастерская по гарантийному ремонту телевизоров обслуживает 2 000 абонентов. Для каждого из купленных телевизоров вероятность поломки в течение гарантийного срока равна 0,3. Найдите вероятность того, что гарантийного ремонта потребуют: а) не более 550 телевизоров; б) 800 телевизоров.

5.29. Аппаратура состоит из 1 000 элементов. Для каждого из элементов вероятность отказа в течение времени T равна 0,1 и не зависит от работы других элементов. Найдите вероятность отказа в течение времени T: а) 100 элементов; б) не менее 150 элементов.

5.30. Производство дает 1% брака. Определите вероятность того, что из взятых на исследование 1 100 изделий выбракованных будет: а) не более 17 изделий; б) ровно 20 изделий.

Задание 6

Для определенной в нижеследующих условиях задач дискретной случайной величины:

1) постройте ряд распределения и многоугольник распределения;

2) найдите функцию распределения и постройте ее график;

3) вычислите числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

6.1. В банк поступило 7 авизо. Подозревают, что среди них 4 фальшивых. Тщательной проверке подвергаются 3 случайно выбранных авизо. Случайная величина X – число фальшивых авизо, которые могут быть выявлены в ходе проверки.

6.2. В течение года некоторая фирма трижды обращается за кредитом в банк. Случайная величина X – число кредитов фирмы за год.

6.3. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. Случайная величина X – число дефектных курток среди купленных.

6.4. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. Случайная величина X – число положительных заключений на проверяемые балансы.

6.5. Вероятность сбоя в работе автоматической телефонной станции равна 0,1. Поступило 5 вызовов. Случайная величина X – число сбоев в работе станции.

6.6. Партия содержит 20 телевизоров, среди которых 6 с дефектом. Купили 3 телевизора. Случайная величина X – число исправленных телевизоров среди купленных.

6.7. Производится 3 независимых измерения исследуемого образца. Вероятность допустить ошибку в каждом измерении равна 0,05. Случайная величина X – число ошибок, допущенных в этих трех измерениях.

6.8. На пути движения автомашины установлено 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Случайная величина X – число светофоров, пройденных машиной без остановки.

6.9. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает $^2/_3$ своих изделий первого сорта и $^1/_3$ – второго сорта. Случайная величина X – число изделий первого сорта среди взятых наугад четырех изделий.

6.10. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Случайная величина X – число бракованных изделий среди отобранных.

6.11. Вероятность успешной сдачи экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8. Случайная величина X – число студентов, успешно сдавших экзамен.

6.12. В урне находится 20 шаров, из них 6 – с дефектом. Наудачу отбирают 4 шара. Случайная величина X – число бездефектных шаров среди отобранных.

6.13. Товаровед осматривает 10 изделий. Вероятность появления бракованного изделия в партии равна 0,2. Случайная величина X – число появлений стандартных изделий в партии.

6.14. Студент знает 40 из 50 вопросов программы курса. Случайная величина X – число правильных ответов на предложенные 3 вопроса программы курса.

6.15. В урне находятся 5 красных и 4 синих шаров. Отбирают 3 шара. Случайная величина X – число шаров красного цвета среди отобранных.

6.16. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Случайная величина X – количество мальчиков в семье из четырех детей.

6.17. В партии из восьми деталей 4 – стандартные. Наудачу отобрано 4 детали. Случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных.

6.18. Студент знает 20 из 25 вопросов. Случайная величина X – число правильных ответов на предложенные 4 вопроса программы курса.

6.19. В урне находится 15 шаров, из них 5 – красных, 10 белых и 5 зеленых. Наудачу отбирают 3 шара. Случайная величина X – число красных шаров среди отобранных.

6.20. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Случайная величина X – число попаданий при четырех выстрелах.

6.21. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу берет 3 детали. Случайная величина X – число окрашенных деталей среди отобранных.

6.22. В группе насчитывается 20 студентов, из них – 40% юношей. Вызывают 5 студентов одновременно. Случайная величина X – число юношей среди вызванных студентов.

6.23. В урне находится 15 шаров, среди которых 10 красных. Наудачу извлекают 4 шара. Случайная величина X – число красных шаров среди отобранных.

6.24. Монету бросают 6 раз. Случайная величина X – число появления герба.

6.25. Партия из 20 изделий содержит 5 бракованных. Из партии выбирают 5 изделий. Случайная величина X – число бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

6.26. В урне находится 10 шаров, из них 8 окрашенных. Наудачу отобраны 3 шара. Случайная величина X – число окрашенных шаров в случайной выборке.

6.27. Случайная величина X – число отказов элементов некоторого устройства в пяти независимых испытаниях. Вероятность отказа в каждом равна 0,9.

6.28. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад извлекают 4 шара. Случайная величина X – число вынутых белых шаров.

6.29. Имеется 3 базы с независимым снабжением. Вероятность отсутствия на базе нужного товара равна 0,1. Предприниматель решил закупить мелкий товар. Случайная величина X – число баз, на которых в данный момент этот товар отсутствует.

6.30. Бросают 4 игральные кости. Случайная величина X – число выпадения одного очка.

Задание 7

Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией распределения вероятностей $F(x)$, варианты которых представлены ниже. Выполните следующее:

1) Найдите функцию плотности распределения данной случайной величины $f(x)$.

2) Постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

3) Вычислите числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

4) Найдите вероятность того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее отрезку $[a; b]$.

7.1. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ ïðè } x\le 1,\\ \dfrac{x^2-x}{2} \text{ ïðè } 1<x\le 2,\\ 1 \text{ ïðè } x>2;\end{cases}$ $a=\dfrac{3}{2};\, b=\dfrac{3}{4}.$

7.2. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ ïðè } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{49} \text{ ïðè } 0<x\le 7,\\ 1 \text{ ïðè } x>7;\end{cases}$ $a=3;\, b=6.$

7.3. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ ïðè } x\le 0,\\ \dfrac{2\sin x}{\sqrt{3}} \text{ ïðè } 0<x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 1 \text{ ïðè } x>\dfrac{\pi}{3};\end{cases}$ $a=\dfrac{\pi}{6};\, b=\dfrac{\pi}{4}.$

7.4. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ ïðè } x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{1000} \text{ ïðè } 0<x\le 10,\\ 1 \text{ ïðè } x>10;\end{cases}$ $a=0;\, b=6.$

7.5. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ ïðè } x<-1,\\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3} \text{ ïðè } -1\le x\le 2,\\ 1 \text{ ïðè } x>2;\end{cases}$ $a=0;\, b=1.$

7.6. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ ïðè } x\le -\dfrac{\pi}{4},\\ \cos 2x \text{ ïðè } -\dfrac{\pi}{4}<x\le 0,\\ 1 \text{ ïðè } x>0;\end{cases}$ $a=-\dfrac{\pi}{6};\, b=0.$

7.7. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \quad x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{64} \ \text{ïðè} \quad 0<x\le 8, \\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>8; \end{cases}$ $\qquad a=1;\ b=7.$

7.8. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \quad x< 0, \\ \dfrac{1}{4} \ \text{ïðè} \quad 0<x\le 4, \\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>4; \end{cases}$ $\qquad a=1;\ b=3.$

7.9. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \quad x\le -\pi, \\ \cos\dfrac{x}{2} \ \text{ïðè} \quad -\pi<x\le 0, \\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>0; \end{cases}$ $\qquad a=-\dfrac{\pi}{3};\ b=-\dfrac{\pi}{2}.$

7.10. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \quad x\le 0, \\ 3x^2+2x \ \text{ïðè} \quad 0<x\le \dfrac{1}{3}, \\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{1}{8};\ b=\dfrac{2}{7}.$

7.11. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \quad x< 2, \\ \dfrac{1}{2}x-1 \ \text{ïðè} \quad 2\le x\le 4, \\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>4; \end{cases}$ $\qquad a=2;\ b=3.$

7.12. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \quad x\le 0, \\ \sin\dfrac{x}{2} \ \text{ïðè} \quad 0<x\le \pi, \\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>\pi; \end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{\pi}{3};\ b=\dfrac{\pi}{2}.$

7.13. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \quad x\le 2, \\ (x-2)^2 \ \text{ïðè} \quad 2<x\le 3, \\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>3; \end{cases}$ $\qquad a=1;\ b=2{,}5.$

7.14. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \ \ x\le 0, \\ \sin 2x \ \text{ïðè} \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ $\quad a=\dfrac{\pi}{6};\ b=\dfrac{\pi}{4}.$

7.15. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \ \ x<1, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2} \ \text{ïðè} \ \ 1\le x\le 3, \\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>3; \end{cases}$ $\quad a=1;\ b=2.$

7.16. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \ \ x<4, \\ \dfrac{1}{2}x-2 \ \text{ïðè} \ \ 4\le x\le 6, \\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>6; \end{cases}$ $\quad a=3;\ b=5.$

7.17. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \ \ x<-1, \\ x^2-1 \ \text{ïðè} \ \ -1\le x\le \sqrt{2}, \\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>\sqrt{2}; \end{cases}$ $\quad a=0;\ b=1.$

7.18. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \ \ x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x \ \text{ïðè} \ \ -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>0; \end{cases}$ $\quad a=-\dfrac{\pi}{4};\ b=\dfrac{\pi}{4}.$

7.19. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \ \ x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{36} \ \text{ïðè} \ \ 0<x\le 6, \\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>6; \end{cases}$ $\quad a=1;\ b=5.$

7.20. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ïðè} \ \ x\le 0, \\ x^3 \ \text{ïðè} \ \ 0<x\le 1, \\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>1; \end{cases}$ $\quad a=0{,}5;\ b=1.$

7.21. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \ \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25} \ \text{ïðè} \ \ 0<x\le 5,\\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>5;\end{cases}$ $\qquad a=2;\ b=4.$

7.22. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \ \ x\le 0,\\ \sin x \ \text{ïðè} \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{\pi}{4};\ b=\dfrac{\pi}{3}.$

7.23. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \ \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{81} \ \text{ïðè} \ \ 0<x\le 9,\\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>9;\end{cases}$ $\qquad a=2;\ b=7.$

7.24. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \ \ x<1,\\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{1}{3} \ \text{ïðè} \ \ 1\le x\le 2,\\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>2;\end{cases}$ $\qquad a=1;\ b=2.$

7.25. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \ \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16} \ \text{ïðè} \ \ 0<x\le 4,\\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>4;\end{cases}$ $\qquad a=1;\ b=3.$

7.26. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \ \ x<2,\\ \dfrac{x}{2}-1 \ \text{ïðè} \ \ 2\le x\le 4,\\ 1 \ \text{ïðè} \ \ x>4;\end{cases}$ $\qquad a=2;\ b=3.$

7.27. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \quad x<0,\\ \dfrac{x^3}{27} \ \text{ïðè} \quad 0<x\le 3,\\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>3;\end{cases}$ $a=1;\ b=2.$

7.28. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \quad x\le 3,\\ \dfrac{1}{3}x-1 \ \text{ïðè} \quad 3<x\le 6,\\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>6;\end{cases}$ $a=4;\ b=5.$

7.29. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9} \ \text{ïðè} \quad 0<x\le 3,\\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>3;\end{cases}$ $a=1;\ b=2.$

7.30. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{ïðè} \quad x<0,\\ \dfrac{x}{5} \ \text{ïðè} \quad 0<x\le 5,\\ 1 \ \text{ïðè} \quad x>5;\end{cases}$ $a=2;\ b=3.$

Задание 8

Даны математическое ожидание (a) и среднее квадратическое отклонение (σ) нормально распределенной случайной величины X. Вычислите:

1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α; β);

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - a$ окажется меньше ε.

Числовые данные по вариантам приведены в таблице 40.

Таблица 40 – **Исходные данные для задания 8**

Вариант	a	σ	α	β	ε
1-й	4	2	5	7	4
2-й	2	3	1	6	3
3-й	3	4	2	8	2

4-й	5	2	4	9	1
5-й	7	3	5	10	4
6-й	9	4	7	12	3
7-й	8	2	6	11	2
8-й	6	3	4	9	1
9-й	5	4	3	8	4
10-й	4	2	2	7	3
11-й	3	3	1	6	2
12-й	2	4	1	7	1

Окончание таблицы 40

Вариант	a	σ	α	β	ε
13-й	1	2	0	5	4
14-й	10	3	8	12	3
15-й	12	4	10	15	2
16-й	11	2	9	14	1
17-й	14	3	12	16	4
18-й	16	4	14	20	3
19-й	12	2	10	15	2
20-й	8	3	6	10	1
21-й	7	4	3	9	4
22-й	9	2	4	10	3
23-й	10	3	8	12	2
24-й	15	4	12	17	1
25-й	18	2	15	20	4
26-й	5	3	3	8	3
27-й	8	4	5	11	2
28-й	4	2	3	10	1
29-й	3	3	2	7	4
30-й	2	4	1	8	3

Задание 9

Дана система случайных величин (X, Y) (таблица 41). Найдите:

1) законы распределения составляющих дискретной двумерной случайной величины;

2) дисперсию компоненты X;

3) корреляционный момент;
4) коэффициент корреляции.

Таблица 41 – **Исходные данные для задания 9**

<table>
<tr><th>Вариант</th><th colspan="4">Числовые данные</th><th>Вариант</th><th colspan="4">Числовые данные</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td><td rowspan="4">2-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,16</td><td>0,10</td><td>0,28</td><td>1</td><td>0,06</td><td>0,18</td><td>0,24</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,14</td><td>0,20</td><td>0,12</td><td>4</td><td>0,12</td><td>0,13</td><td>0,27</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 41

<table>
<tr><th>Вариант</th><th colspan="4">Числовые данные</th><th>Вариант</th><th colspan="4">Числовые данные</th></tr>
<tr><td rowspan="4">3-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td><td rowspan="4">11-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,12</td><td>0,13</td><td>0,24</td><td>3</td><td>0,14</td><td>0,12</td><td>0,13</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,18</td><td>0,06</td><td>0,27</td><td>7</td><td>0,13</td><td>0,20</td><td>0,28</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td><td rowspan="4">12-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,13</td><td>0,24</td><td>0,12</td><td>2</td><td>0,11</td><td>0,13</td><td>0,26</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,18</td><td>0,06</td><td>0,27</td><td>6</td><td>0,21</td><td>0,06</td><td>0,23</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td><td rowspan="4">13-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,12</td><td>0,24</td><td>0,22</td><td>4</td><td>0,22</td><td>0,09</td><td>0,32</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,20</td><td>0,15</td><td>0,07</td><td>7</td><td>0,14</td><td>0,17</td><td>0,06</td></tr>
<tr><td rowspan="4">6-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td><td rowspan="4">14-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0,16</td><td>0,10</td><td>0,28</td><td>3</td><td>0,13</td><td>0,24</td><td>0,12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,14</td><td>0,20</td><td>0,12</td><td>5</td><td>0,18</td><td>0,06</td><td>0,27</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td><td rowspan="4">15-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,06</td><td>0,18</td><td>0,24</td><td>1</td><td>0,12</td><td>0,24</td><td>0,22</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,12</td><td>0,13</td><td>0,27</td><td>3</td><td>0,20</td><td>0,15</td><td>0,07</td></tr>
<tr><td rowspan="4">8-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td><td rowspan="4">16-й</td><td rowspan="2">Y</td><td colspan="3">X</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,16</td><td>0,10</td><td>0,28</td><td>3</td><td>0,13</td><td>0,08</td><td>0,12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,14</td><td>0,20</td><td>0,12</td><td>5</td><td>0,20</td><td>0,16</td><td>0,31</td></tr>
</table>

9-й	*Y*	*X*			17-й	*Y*	*X*		
		2	4	5			3	4	7
	1	0,12	0,13	0,24		3	0,30	0,20	0,10
	3	0,18	0,06	0,27		6	0,05	0,12	0,23
10-й	*Y*	*X*			18-й	*Y*	*X*		
		4	5	6			4	6	8
	2	0,06	0,18	0,24		2	0,24	0,30	0,05
	3	0,12	0,13	0,27		5	0,10	0,12	0,19

Окончание таблицы 41

Вариант	Числовые данные				Вариант	Числовые данные			
19-й	*Y*	*X*			25-й	*Y*	*X*		
		5	7	9			3	4	7
	4	0,14	0,15	0,21		4	0,15	0,23	0,15
	7	0,16	0,20	0,14		8	0,21	0,09	0,17
20-й	*Y*	*X*			26-й	*Y*	*X*		
		6	9	12			4	5	8
	5	0,23	0,07	0,15		3	0,13	0,14	0,19
	9	0,17	0,20	0,18		5	0,24	0,08	0,22
21-й	*Y*	*X*			27-й	*Y*	*X*		
		5	8	10			2	6	9
	2	0,11	0,21	0,14		5	0,21	0,18	0,14
	7	0,20	0,09	0,25		9	0,08	0,14	0,25
22-й	*Y*	*X*			28-й	*Y*	*X*		
		4	7	9			4	7	9
	4	0,30	0,12	0,10		2	0,09	0,15	0,16
	10	0,08	0,12	0,28		7	0,17	0,23	0,20
23-й	*Y*	*X*			29-й	*Y*	*X*		
		8	9	12			1	4	8
	1	0,14	0,11	0,18		4	0,11	0,24	0,17
	6	0,23	0,04	0,30		8	0,21	0,08	0,19
24-й	*Y*	*X*			30-й	*Y*	*X*		
		3	6	8			4	8	14
	2	0,21	0,07	0,23		3	0,12	0,13	0,20
	8	0,11	0,20	0,18		5	0,23	0,12	0,20

Задание 10

Используя результаты испытания ламп на продолжительность работы (T) в часах, приведенные в таблицах 42–71, выполните следующее:

1) Составьте интервальные статистические ряды распределения частот и частотностей значений случайной величины, разбив весь диапазон наблюдаемых значений на 5–6 интервалов.

2) Найдите эмпирическую функцию распределения случайной величины и постройте ее график.

3) Найдите выборочные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

4) Предполагая, что исследуемая случайная величина распределена по показательному (таблицы 42–54) и нормальному (таблицы 55–71) законам, напишите формулу плотности вероятности гипотетического закона распределения и найдите вероятности попадания случайной величины в каждый из интервалов.

5) Приняв уровень значимости $\alpha = 0,05$ по критериям Пирсона и Колмогорова, проверьте степень согласия теоретического и эмпирического распределений.

Таблица 42 – **Вариант 10.1**

25	48	511	68	67	1 020	1 631	2 010	32	14
125	543	630	420	420	2 640	35	18	920	417
44	525	241	1 020	1 560	84	754	162	1 654	17
514	1 240	25	48	920	448	820	1 610	2 140	0
24	990	1 100	0	647	900	1 120	25	965	81
0	800	810	140	1 800	24	3 000	444	750	41
333	413	800	25	1 120	88	1 600	34	550	441
700	700	432	85	31	900	1 300	400	1 200	1 320
1 640	600	130	3	120	700	111	953	125	720
1 200	420	25	24	1 110	7	2 080	1 050	1 300	34

Таблица 43 – **Вариант 10.2**

27	50	513	70	69	1 022	1 633	2 012	34	16
127	545	632	422	422	2 642	37	20	922	419

46	527	243	1 022	1 562	86	756	164	1 656	19
516	1 242	27	50	922	450	822	1 612	2 142	2
26	992	1 102	2	649	902	1 122	27	967	83
2	802	812	142	1 802	26	3 002	446	752	43
335	415	802	27	1 122	90	1 602	36	552	443
702	702	434	87	33	902	1 302	402	1 202	1 322
1 642	602	132	5	122	702	113	955	127	722
1 202	422	27	26	1 112	9	2 082	1 052	1 302	36

Таблица 44 – **Вариант 10.3**

29	52	515	72	71	1 024	1 635	2 014	36	18
129	547	634	424	424	2 644	39	22	924	421
48	529	245	1 024	1 564	88	758	166	1 658	21
518	1 244	29	52	924	452	824	1 614	2 144	4
28	994	1 104	4	651	904	1 124	29	969	85
4	804	814	144	1 804	28	3 004	448	754	45
337	417	804	29	1 124	92	1 604	38	554	445
704	704	436	89	35	904	1 304	404	1 204	1 324
1 644	604	134	7	124	704	115	957	129	724
1 204	424	29	28	1 114	11	2 084	1 054	1 304	38

Таблица 45 – **Вариант 10.4**

31	54	517	74	73	1 026	1 637	2 016	38	20
131	549	636	426	426	2 646	41	24	926	423
50	531	247	1 026	1 566	90	760	168	1 660	23
520	1 246	31	54	926	454	826	1 616	2 146	6
30	996	1 106	6	653	906	1 126	31	971	87
6	806	816	146	1 806	30	3 006	450	756	47
339	419	806	31	1 126	94	1 606	40	556	447
706	706	438	91	37	906	1 306	406	1 206	1 326
1 646	606	136	9	126	706	117	959	131	726
1 206	426	31	30	1 116	13	2 086	1 056	1 306	40

Таблица 46 – **Вариант 10.5**

33	56	519	76	75	1 028	1 639	2 018	40	22

133	551	638	428	428	2 648	43	26	928	425
52	533	249	1 028	1 568	92	762	170	1 662	25
522	1 248	33	56	928	456	828	1 618	2 148	8
32	998	1 108	8	655	908	1 128	33	973	89
8	808	818	148	1 808	32	3 008	452	758	49
341	421	808	33	1 128	96	1 608	42	558	449
708	708	440	93	39	908	1 308	408	1 208	1 328
1 648	608	138	11	128	708	119	961	133	728
1 208	428	33	32	1 118	15	2 088	1 058	1 308	42

Таблица 47 – **Вариант 10.6**

35	58	521	78	77	1 030	1 641	2 020	42	24
135	553	640	430	430	2 650	45	28	930	427
54	535	251	1 030	1 570	94	764	172	1 664	27
524	1 250	35	58	930	458	830	1 620	2 150	10
34	1 000	1 110	10	657	910	1 130	35	975	91
10	810	820	150	1 810	34	3 010	454	760	51
343	423	810	35	1 130	98	1 610	44	560	451
710	710	442	95	41	910	1 310	410	1 210	1 330
1 650	610	140	13	130	710	121	963	135	730
1 210	430	35	34	1 120	17	2 090	1 060	1 310	44

Таблица 48 – **Вариант 10.7**

37	60	523	80	79	1 032	1 643	2 022	44	26
137	555	642	432	432	2 652	47	30	932	429
56	537	253	1 032	1 572	96	766	174	1 666	29
526	1 252	37	60	932	460	832	1 622	2 152	12
36	1 002	1 112	12	659	912	1 132	37	977	93
12	812	822	152	1 812	36	3 012	456	762	53
345	425	812	37	1 132	100	1 612	46	562	453
712	712	444	97	43	912	1 312	412	1 212	1 332
1 652	612	142	15	132	712	123	965	137	732
1 212	432	37	36	1 122	19	2 092	1 062	1 312	46

Таблица 49 – **Вариант 10.8**

39	62	525	82	81	1 034	1 645	2 024	46	28
139	557	644	434	434	2 654	49	32	934	431
58	539	255	1 034	1 574	98	768	176	1 668	31
528	1 254	39	62	934	462	834	1 624	2 154	14
38	1 004	1 114	14	661	914	1 134	39	979	95
14	814	824	154	1 814	38	3 014	458	764	55
347	427	814	39	1 134	102	1 614	48	564	455
714	714	446	99	45	914	1 314	414	1 214	1 334
1 654	614	144	17	134	714	125	967	139	734
1 214	434	39	38	1 124	21	2 094	1 064	1 314	48

Таблица 50 – **Вариант 10.9**

41	64	527	84	83	1 036	1 647	2 026	48	30
141	559	646	436	436	2 656	51	34	936	433
60	541	257	1 036	1 576	100	770	178	1 670	33
530	1 256	41	64	936	464	836	1 626	2 156	16
40	1 006	1 116	16	663	916	1 136	41	981	97
16	816	826	156	1 816	40	3 016	460	766	57
349	429	816	41	1 136	104	1 616	50	566	457
716	716	448	101	47	916	1 316	416	1 216	1 336
1 656	616	146	19	136	716	127	969	141	736
1 216	436	41	40	1 126	23	2 096	1 066	1 316	50

Таблица 51 – **Вариант 10.10**

43	66	529	86	85	1 038	1 649	2 028	50	32
143	561	648	438	438	2 658	53	36	938	435
62	543	259	1 038	1 578	102	772	180	1 672	35
532	1 258	43	66	938	466	838	1 628	2 158	18
42	1 008	1 118	18	665	918	1 138	43	983	99
18	818	828	158	1 818	42	3 018	462	768	59
351	431	818	43	1 138	106	1 618	52	568	459
718	718	450	103	49	918	1 318	418	1 218	1 338
1 658	618	148	21	138	718	129	971	143	738
1 218	438	43	42	1 128	25	2 098	1 068	1 318	52

Таблица 52 – **Вариант 10.11**

45	68	531	88	87	1 040	1 651	2 030	52	34
145	563	650	440	440	2 660	55	38	940	437
64	545	261	1 040	1 580	104	774	182	1 674	37
534	1 260	45	68	940	468	840	1 630	2 160	20
44	1 010	1 120	20	667	920	1 140	45	985	101
20	820	830	160	1 820	44	3 020	464	770	61
353	433	820	45	1 140	108	1 620	54	570	461
720	720	452	105	51	920	1 320	420	1 220	1 340
1 660	620	150	23	140	720	131	973	145	740
1 220	440	45	44	1 130	27	2 100	1 070	1 320	54

Таблица 53 – **Вариант 10.12**

47	70	533	90	89	1 042	1 653	2 032	54	36
147	565	652	442	442	2 662	57	40	942	439
66	547	263	1 042	1 582	106	776	184	1 676	39
536	1 262	47	70	942	470	842	1 632	2 162	22
46	1 012	1 122	22	669	922	1 142	47	987	103
22	822	832	162	1 822	46	3 022	466	772	63
355	435	822	47	1 142	110	1 622	56	572	463
722	722	454	107	53	922	1 322	422	1 222	1 342
1 662	622	152	25	142	722	133	975	147	742
1 222	442	47	46	1 132	29	2 102	1 072	1 322	56

Таблица 54 – **Вариант 10.13**

49	72	535	92	91	1 044	1 655	2 034	56	38
149	567	654	444	444	2 664	59	42	944	441
68	549	265	1 044	1 584	108	778	186	1 678	41
538	1 264	49	72	944	472	844	1 634	2 164	24
48	1 014	1 124	24	671	924	1 144	49	989	105
24	824	834	164	1 824	48	3 024	468	774	65
357	437	824	49	1 144	112	1 624	58	574	465
724	724	456	109	55	924	1 324	424	1 224	1 344
1 664	624	154	27	144	724	135	977	149	744
1 224	444	49	48	1 134	31	2 104	1 074	1 324	58

Таблица 55 – **Вариант 10.14**

580	310	170	520	300	600	310	365	320	360
550	480	90	450	480	190	300	436	540	92
400	435	340	580	430	350	540	540	510	540
480	390	540	420	450	420	400	540	280	560
420	580	340	360	240	420	325	510	360	400
420	330	300	490	340	355	225	405	420	580
430	180	220	400	300	480	540	580	405	505

Таблица 56 – **Вариант 10.15**

582	312	172	522	302	602	312	367	322	362
552	482	92	452	482	192	302	438	542	94
402	437	342	582	432	352	542	542	512	542
482	392	542	422	452	422	402	542	282	562
422	582	342	362	242	422	327	512	362	402
422	332	302	492	342	357	227	407	422	582
432	182	222	402	302	482	542	582	407	507

Таблица 57 – **Вариант 10.16**

584	314	174	524	304	604	314	369	324	364
554	484	94	454	484	194	304	440	544	96
404	439	344	584	434	354	544	544	514	544
484	394	544	424	454	424	404	544	284	564
424	584	344	364	244	424	329	514	364	404
424	334	304	494	344	359	229	409	424	584
434	184	224	404	304	484	544	584	409	509

Таблица 58 – **Вариант 10.17**

586	316	176	526	306	606	316	371	326	366
556	486	96	456	486	196	306	442	546	98
406	441	346	586	436	356	546	546	516	546
486	396	546	426	456	426	406	546	286	566
426	586	346	366	246	426	331	516	366	406
426	336	306	496	346	361	231	411	426	586

436	186	226	406	306	486	546	586	411	511

Таблица 59 – **Вариант 10.18**

588	318	178	528	308	608	318	373	328	368
558	488	98	458	488	198	308	444	548	100
408	443	348	588	438	358	548	548	518	548
488	398	548	428	458	428	408	548	288	568
428	588	348	368	248	428	333	518	368	408
428	338	308	498	348	363	233	413	428	588
438	188	228	408	308	488	548	588	413	513

Таблица 60 – **Вариант 10.19**

590	320	180	530	310	610	320	375	330	370
560	490	100	460	490	200	310	446	550	102
410	445	350	590	440	360	550	550	520	550
490	400	550	430	460	430	410	550	290	570
430	590	350	370	250	430	335	520	370	410
430	340	310	500	350	365	235	415	430	590
440	190	230	410	310	490	550	590	415	515

Таблица 61 – **Вариант 10.20**

592	322	182	532	312	612	322	377	332	372
562	492	102	462	492	202	312	448	552	104
412	447	352	592	442	362	552	552	522	552
492	402	552	432	462	432	412	552	292	572
432	592	352	372	252	432	337	522	372	412
432	342	312	502	352	367	237	417	432	592
442	192	232	412	312	492	552	592	417	517

Таблица 62 – **Вариант 10.21**

594	324	184	534	314	614	324	379	334	374
564	494	104	464	494	204	314	450	554	106
414	449	354	594	444	364	554	554	524	554
494	404	554	434	464	434	414	554	294	574
434	594	354	374	254	434	339	524	374	414
434	344	314	504	354	369	239	419	434	594

444	194	234	414	314	494	554	594	419	519

Таблица 63 – **Вариант 10.22**

596	326	186	536	316	616	326	381	336	376
566	496	106	466	496	206	316	452	556	108
416	451	356	596	446	366	556	556	526	556
496	406	556	436	466	436	416	556	296	576
436	596	356	376	256	436	341	526	376	416
436	346	316	506	356	371	241	421	436	596
446	196	236	416	316	496	556	596	421	521

Таблица 64 – **Вариант 10.23**

598	328	188	538	318	618	328	383	338	378
568	498	108	468	498	208	318	454	558	110
418	453	358	598	448	368	558	558	528	558
498	408	558	438	468	438	418	558	298	578
438	598	358	378	258	438	343	528	378	418
438	348	318	508	358	373	243	423	438	598
448	198	238	418	318	498	558	598	423	523

Таблица 65 – **Вариант 10.24**

600	330	190	540	320	620	330	385	340	380
570	500	110	470	500	210	320	456	560	112
420	455	360	600	450	370	560	560	530	560
500	410	560	440	470	440	420	560	300	580
440	600	360	380	260	440	345	530	380	420
440	350	320	510	360	375	245	425	440	600
450	200	240	420	320	500	560	600	425	525

Таблица 66 – **Вариант 10.25**

602	332	192	542	322	622	332	387	342	382
572	502	112	472	502	212	322	458	562	114
422	457	362	602	452	372	562	562	532	562
502	412	562	442	472	442	422	562	302	582
442	602	362	382	262	442	347	532	382	422
442	352	322	512	362	377	247	427	442	602

452	202	242	422	322	502	562	602	427	527

Таблица 67 – **Вариант 10.26**

604	334	194	544	324	624	334	389	344	384
574	504	114	474	504	214	324	460	564	116
424	459	364	604	454	374	564	564	534	564
504	414	564	444	474	444	424	564	304	584
444	604	364	384	264	444	349	534	384	424
444	354	324	514	364	379	249	429	444	604
454	204	244	424	324	504	564	604	429	529

Таблица 68 – **Вариант 10.27**

606	336	196	546	326	626	336	391	346	386
576	506	116	476	506	216	326	462	566	118
426	461	366	606	456	376	566	566	536	566
506	416	566	446	476	446	426	566	306	586
446	606	366	386	266	446	351	536	386	426
446	356	326	516	366	381	251	431	446	606
456	206	246	426	326	506	566	606	431	531

Таблица 69 – **Вариант 10.28**

608	338	198	548	328	628	338	393	348	388
578	508	118	478	508	218	328	464	568	120
428	463	368	608	458	378	568	568	538	568
508	418	568	448	478	448	428	568	308	588
448	608	368	388	268	448	353	538	388	428
448	358	328	518	368	383	253	433	448	608
458	208	248	428	328	508	568	608	433	533

Таблица 70 – **Вариант 10.29**

610	340	200	550	330	630	340	395	350	390
580	510	120	480	510	220	330	466	570	122
430	465	370	610	460	380	570	570	540	570
510	420	570	450	480	450	430	570	310	590
450	610	370	390	270	450	355	540	390	430
450	360	330	520	370	385	255	435	450	610

460	210	250	430	330	510	570	610	435	535

Таблица 71 – **Вариант 10.30**

612	342	202	552	332	632	342	397	352	392
582	512	122	482	512	222	332	468	572	124
432	467	372	612	462	382	572	572	542	572
512	422	572	452	482	452	432	572	312	592
452	612	372	392	272	452	357	542	392	432
452	362	332	522	372	387	257	437	452	612
462	212	252	432	332	512	572	612	437	537

Задание 11

На четырех предприятиях отрасли (A_1, A_2, A_3, A_4) за 6 лет сделана выборка по повышению производительности труда (таблицы 72–101). Квалификации рабочих по предприятиям распределены по четырем уровням. Определите влияние квалификации рабочих на повышение производительности труда.

Таблица 72 – **Вариант 11.1**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1,1	1,1	1,2	1,3
2	1,1	1,2	1,3	1,4
3	1,2	1,1	1,2	1,3
4	1,0	0,8	1,0	1,2
5	1,3	1,3	1,2	1,5
6	0,9	1,2	1,3	1,2

Таблица 73 – **Вариант 11.2**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,2	0,3	0,4	1,1
2	0,1	0,2	0,5	1,2
3	0,3	0,1	0,2	1,3
4	0,4	0,6	0,7	1,2
5	0,5	0,7	0,9	1,3
6	0,4	0,5	1,0	1,4

Таблица 74 – **Вариант 11.3**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,8	0,9	1,2	1,7
2	0,7	0,6	1,4	1,8
3	0,9	1,2	1,5	1,0
4	1,2	0,9	1,3	1,3
5	1,3	1,2	1,1	1,2
6	0,7	1,2	1,0	1,8

Таблица 75 – **Вариант 11.4**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2,1	2,5	3,1	3,7
2	2,0	2,6	3,2	3,8
3	2,3	2,3	3,1	3,9
4	2,3	2,4	3,0	1,0
5	2,2	2,3	3,0	1,5
6	2,4	2,5	3,4	1,2

Таблица 76 – **Вариант 11.5**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,7	1,2	2,0	3,1
2	0,7	1,3	2,1	3,1
3	0,8	1,1	2,2	3,5
4	0,3	1,2	2,3	3,6
5	0,9	1,5	2,4	3,7
6	1,0	1,6	2,7	3,8

Таблица 77 – **Вариант 11.6**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	5,3	6,1	6,2	6,3
2	5,2	6,1	6,3	6,4
3	5,1	6,0	6,1	6,5

4	5,6	6,3	6,0	6,6
5	5,7	3,4	6,5	6,7
6	5,8	6,7	6,8	7,0

Таблица 78 – **Вариант 11.7**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,1	0,3	1,2	2,0
2	0,2	0,4	1,3	2,1
3	0,4	0,7	1,0	2,7

Окончание таблицы 78

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
4	0,3	0,8	1,4	2,6
5	0,6	0,9	1,5	2,5
6	0,7	1,0	1,7	2,8

Таблица 79 – **Вариант 11.8**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	5,3	3,1	6,1	7,0
2	5,4	3,2	6,3	7,2
3	5,2	3,7	6,2	7,1
4	4,8	3,8	6,9	7,9
5	5,7	4,5	6,1	7,8
6	4,9	4,8	6,3	7,0

Таблица 80 – **Вариант 11.9**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	3,1	4,2	5,1	5,2
2	3,6	4,0	6,2	5,3
3	3,8	4,3	5,0	5,1
4	3,4	4,5	5,3	5,4
5	3,5	4,9	5,1	5,2
6	3,9	4,8	5,8	5,9

Таблица 81 – **Вариант 11.10**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,7	0,9	1,3	2,3
2	0,8	0,8	1,4	2,1
3	1,3	0,9	1,6	2,6
4	1,2	1,1	1,5	2,0
5	0,3	0,8	1,6	2,2
6	0,2	0,7	1,2	2,4

Таблица 82 – **Вариант 11.11**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1,7	1,9	2,3	3,3
2	1,8	1,8	2,4	3,1
3	2,3	1,9	2,6	3,6
4	2,2	2,1	2,5	3,0
5	1,3	1,8	2,6	3,2
6	1,2	1,7	2,2	3,4

Таблица 83 – **Вариант 11.12**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2,7	2,9	3,3	4,3
2	2,8	2,8	3,4	4,1
3	3,3	2,9	3,6	4,6
4	3,2	3,1	3,5	4,0
5	2,3	2,8	3,6	4,2
6	2,2	2,7	3,2	4,4

Таблица 84 – **Вариант 11.13**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2,2	2,4	2,8	3,8
2	2,3	2,3	2,9	3,6
3	2,8	2,4	3,1	4,1

4	2,7	2,6	3,0	3,5
5	1,8	2,3	3,1	3,7
6	1,7	2,2	2,7	3,9

Таблица 85 – **Вариант 11.14**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1,9	2,1	2,5	3,5
2	2,0	2,0	2,6	3,3
3	2,5	2,1	2,8	3,8

Окончание таблицы 85

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
4	2,4	2,3	2,7	3,2
5	1,5	2,0	2,8	3,4
6	1,4	1,9	2,4	3,6

Таблица 86 – **Вариант 11.15**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2,0	2,2	2,6	3,6
2	2,1	2,1	2,7	3,4
3	2,6	2,2	2,9	3,9
4	2,5	2,4	2,8	3,3
5	1,6	2,1	2,9	3,5
6	1,5	2,0	2,5	3,7

Таблица 87 – **Вариант 11.16**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2,1	2,3	2,7	3,7
2	2,2	2,2	2,8	3,5
3	2,7	2,3	3,0	4,0
4	2,6	2,5	2,9	3,4
5	1,7	2,2	3,0	3,6
6	1,6	2,1	2,6	3,8

Таблица 88 – **Вариант 11.17**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,5	0,7	1,1	2,1
2	0,6	0,6	1,2	1,9
3	1,1	0,7	1,4	2,4
4	1,0	0,9	1,3	1,8
5	0,1	0,6	1,4	2,0
6	0,0	0,5	1,0	2,2

Таблица 89 – **Вариант 11.18**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,9	1,1	1,5	2,5
2	1,0	1,0	1,6	2,3
3	1,5	1,1	1,8	2,8
4	1,4	1,3	1,7	2,2
5	0,5	1,0	1,8	2,4
6	0,4	0,9	1,4	2,6

Таблица 90 – **Вариант 11.19**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2,9	3,1	3,5	4,5
2	3,0	3,0	3,6	4,3
3	3,5	3,1	3,8	4,8
4	3,4	3,3	3,7	4,2
5	2,5	3,0	3,8	4,4
6	2,4	2,9	3,4	4,6

Таблица 91 – **Вариант 11.20**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	3,2	3,4	3,8	4,8
2	3,3	3,3	3,9	4,6
3	3,8	3,4	4,1	5,1

4	3,7	3,6	4,0	4,5
5	2,8	3,3	4,1	4,7
6	2,7	3,2	3,7	4,9

Таблица 92 – **Вариант 11.21**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	4,2	4,4	4,8	5,8
2	4,3	4,3	4,9	5,6
3	4,8	4,4	5,1	6,1

Окончание таблицы 92

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
4	4,7	4,6	5,0	5,5
5	3,8	4,3	5,1	5,7
6	3,7	4,2	4,7	5,9

Таблица 93 – **Вариант 11.22**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	3,4	3,6	4,0	5,0
2	3,5	3,5	4,1	4,8
3	4,0	3,6	4,3	5,3
4	3,9	3,8	4,2	4,7
5	3,0	3,5	4,3	4,9
6	2,9	3,4	3,9	5,1

Таблица 94 – **Вариант 11.23**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	4,0	4,2	4,6	5,6
2	4,1	4,1	4,7	5,4
3	4,6	4,2	4,9	5,9
4	4,5	4,4	4,8	5,3
5	3,6	4,1	4,9	5,5
6	3,5	4,0	4,5	5,7

Таблица 95 – **Вариант 11.24**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	6,2	6,4	6,8	7,8
2	6,3	6,3	6,9	7,6
3	6,8	6,4	7,1	8,1
4	6,7	6,6	7,0	7,5
5	5,8	6,3	7,1	7,7
6	5,7	6,2	6,7	7,9

Таблица 96 – **Вариант 11.25**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	7,7	7,9	8,3	9,3
2	7,8	7,8	8,4	9,1
3	8,3	7,9	8,6	9,6
4	8,2	8,1	8,5	9,0
5	7,3	7,8	8,6	9,2
6	7,2	7,7	8,2	9,4

Таблица 97 – **Вариант 11.26**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	8,7	8,9	9,3	10,3
2	8,8	8,8	9,4	10,1
3	9,3	8,9	9,6	10,6
4	9,2	9,1	9,5	10,0
5	8,3	8,8	9,6	10,2
6	8,2	8,7	9,2	10,4

Таблица 98 – **Вариант 11.27**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	6,0	6,2	6,6	7,6
2	6,1	6,1	6,7	7,4
3	6,6	6,2	6,9	7,9

4	6,5	6,4	6,8	7,3
5	5,6	6,1	6,9	7,5
6	5,5	6,0	6,5	7,7

Таблица 99 – **Вариант 11.28**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	7,1	7,3	7,7	8,7
2	7,2	7,2	7,8	8,5
3	7,7	7,3	8,0	9,0

Окончание таблицы 99

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
4	7,6	7,5	7,9	8,4
5	6,7	7,2	8,0	8,6
6	6,6	7,1	7,6	8,8

Таблица 100 – **Вариант 11.29**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,8	1,0	1,4	2,4
2	0,9	0,9	1,5	2,2
3	1,4	1,0	1,7	2,7
4	1,3	1,2	1,6	2,1
5	0,4	0,9	1,7	2,3
6	0,3	0,8	1,3	2,5

Таблица 101 – **Вариант 11.30**

Номер испытания (год)	Производительность труда (фактор A)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,6	0,8	1,2	2,2
2	0,7	0,7	1,3	2,0
3	1,2	0,8	1,5	2,5
4	1,1	1,0	1,4	1,9
5	0,2	0,7	1,5	2,1

6	0,1	0,6	1,1	2,3

Задание 12

В таблицах 102–131 отражены производственные средства (X) в условных единицах и суточная выработка (Y) в часах в 100 фирмах.

Выполните следующее:

1) По заданной корреляционной таблице определите числовые характеристики $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_y$, условные средние $\bar{y}_x$ и $\bar{x}_y$, коэффициенты корреляции и детерминации.

2) Постройте корреляционное поле. По характеру точек на корреляционном поле подберите общий вид функции регрессии.

3) Определите параметры эмпирической линейной функции регрессии Y на X и X на Y и постройте ее график.

4) При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверьте адекватность линейной регрессии исходным данным.

Таблица 102 – **Вариант 12.1**

Y	X						
	10–14	14–18	18–22	22–26	26–30	30–34	n_y
15–25	3	4					7
25–35		2	6				8
35–45			3	50	4		57
45–55			2	8	6		16
55–65				3	7	2	12
n_x	3	6	11	61	17	2	100

Таблица 103 – **Вариант 12.2**

Y	X						
	10–14	14–18	18–22	22–26	26–30	30–34	n_y
10–20	5	1					6
20–30		6	2				8
30–40			5	40	5		50
40–50			2	8	7		17
50–60				4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	100

Таблица 104 – **Вариант 12.3**

Y	X						
	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	n_y
10–18	2	4					6
18–26		3	7				10
26–34		1	48	10	2		61
34–42			2	7	5		14
42–50				1	2	2	5
50–58					2	2	4
n_x	2	8	57	18	11	4	100

Таблица 105 – **Вариант 12.4**

Y	X						
	10–18	18–26	26–34	34–42	42–50	50–38	n_y
12–20	3	7	2				12
20–28		2	8	6			16
28–36		3	50	4			57
36–44			2	6			8
44–52				2	1	1	4
52–60					2	1	3
n_x	3	12	62	18	3	2	100

Таблица 106 – **Вариант 12.5**

Y	X					
	10–16	16–22	22–28	28–34	34–40	n_y
14–20	3					3
20–26	7	2	3			12
26–32	2	8	50			60
32–38		6	4	2		12
38–44				6	3	9
44–50					4	4
n_x	12	16	57	8	7	100

Таблица 107 – **Вариант 12.6**

Y	X						
	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	50–55	n_y
16–18	2	3					5
18–20	3	4	1				8
20–22		7	20	3			30
22–24			10	5	3	2	20
24–26					5	12	17
26–28					10	10	20
n_x	5	14	31	8	18	24	100

Таблица 108 – **Вариант 12.7**

Y	X					
	14–19	19–24	24–29	29–34	34–39	n_y
16,5–18,5	2	2				4
18,5–20,5	3	4				7
20,5–22,5		3	6	3		12
22,5–24,5		9	11	13	2	35
24,5–26,5			9	9	9	27
26,5–28,5				8	7	15
n_x	5	18	26	33	18	100

Таблица 109 – **Вариант 12.8**

Y	X					
	10–16	16–22	22–28	28–34	34–40	n_y
14–20	3					3
20–26	7	2	3			12
26–32	2	8	50			60
32–38		6	4	2		12
38–44				6	3	9
44–50					4	4
n_x	12	16	57	8	7	100

Таблица 110 – **Вариант 12.9**

Y	X					
	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	n_y
16–18	10	20				30
18–20	10	20				30
20–22		4	3	9		16
22–24		2	5	6		13
24–26			1	7	1	9
26–28				1	1	2
n_x	20	46	9	23	2	100

Таблица 111 – **Вариант 12.10**

Y	X						
	14–18	18–22	22–26	26–30	30–34	34–38	n_y
17–19	20	1					21
19–21	10	3	13				26
21–23		3	14	8			25
23–25			6	6	7		19
25–27				1	5	1	7
27–29					1	1	2
n_x	30	7	33	15	13	2	100

Таблица 112 – **Вариант 12.11**

Y	X						
	4	9	14	19	24	29	n_y
10	2	3					5
20		7	3				10
30			2	50	2		54
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

Таблица 113 – **Вариант 12.12**

Y	X						
	10	15	20	25	30	35	n_y
30	2	6					8

40		4	4				8
50			7	35	8		50
60			2	10	8		20
70				5	6	3	14
n_x	2	10	13	50	22	3	100

Таблица 114 – **Вариант 12.13**

Y	X						
	15	20	25	30	35	40	n_y
5	4	2					6
10		6	4				10

Окончание таблицы 114

Y	X						
	15	20	25	30	35	40	n_y
15			6	45	2		53
20			2	8	6		16
25				4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	100

Таблица 115 – **Вариант 12.14**

Y	X						
	5	10	15	20	25	30	n_y
20	1	5					6
30		5	3				8
40			9	40	2		51
50			4	11	6		21
60				4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	100

Таблица 116 – **Вариант 12.15**

Y	X						
	10	15	20	25	30	35	n_y
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17

30				4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	100

Таблица 117 – **Вариант 12.16**

Y	X						
	5	10	15	20	25	30	n_y
8	2	4					6
12		3	7				10
16			5	30	10		45
20			7	10	8		25
24				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	100

Таблица 118 – **Вариант 12.17**

Y	X						
	2	7	12	17	22	27	n_y
10	2	4					6
20		6	2				8
30			3	50	2		55
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

Таблица 119 – **Вариант 12.18**

Y	X						
	11	16	21	26	31	36	n_y
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	100

Таблица 120 – **Вариант 12.19**

Y	X						
	4	9	14	19	24	29	n_y
8	3	3					6

18		5	4				9
28			40	2	8		50
38			5	10	6		21
48				4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	100

Таблица 121 – **Вариант 12.20**

Y	*X*						
	5	10	15	20	25	30	n_y
11	4	2					6
21		5	3				8
31			5	45	5		55

Окончание таблицы 121

Y	*X*						
	5	10	15	20	25	30	n_y
41			2	8	7		17
51				4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	100

Таблица 122 – **Вариант 12.21**

Y	*X*						
	5	10	15	20	25	30	n_y
35	4	2					6
45		5	3				8
55			5	45	5		55
65			2	8	7		17
75				4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	100

Таблица 123 – **Вариант 12.22**

Y	*X*						
	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3					6
40		5	4				9
50			40	2	8		50
60			5	10	6		21

70				4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	100

Таблица 124 – **Вариант 12.23**

Y	*X*						
	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	100

Таблица 125 – **Вариант 12.24**

Y	*X*						
	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4					6
120		6	2				8
130			3	50	2		55
140			1	10	6		17
150				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

Таблица 126 – **Вариант 12.25**

Y	*X*						
	5	10	15	20	25	30	n_y
20	2	4					6
30		3	7				10
40			5	30	10		45
50			7	10	8		25
60				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	100

Таблица 127 – **Вариант 12.26**

Y	*X*						
	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1					6

45		6	2				8
55			5	40	5		50
65			2	8	7		17
75				4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	100

Таблица 128 – **Вариант 12.27**

Y	*X*						
	5	10	15	20	25	30	n_y
30	1	5					6
40		5	3				8
50			9	40	2		51

Окончание таблицы 128

Y	*X*						
	5	10	15	20	25	30	n_y
60			4	11	6		21
70				4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	100

Таблица 129 – **Вариант 12.28**

Y	*X*						
	15	20	25	30	35	40	n_y
25	4	2					6
35		6	4				10
45			6	45	2		53
55			2	8	6		16
65				4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	100

Таблица 130 – **Вариант 12.29**

Y	*X*					
	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6				10
26		8	10			18
36			32	3	9	44
46			4	12	6	22

56				1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	100

Таблица 131 – **Вариант 12.30**

Y	X						
	15	20	25	30	35	40	n_y
5	4	4					6
15		4	2				10
25			8	45	2		53
35			2	8	6		16
45				4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	100

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Используя результаты испытания ламп на продолжительность работы (T) в часах, приведенные в таблице 132, выполните следующее:

1) Составьте интервальные статистические ряды распределения частот и частотностей значений случайной величины, разбив весь диапазон наблюдаемых значений на 6 интервалов.

2) Найдите эмпирическую функцию распределения случайной величины и постройте ее график.

3) Найдите выборочные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

4) Предполагая, что исследуемая случайная величина распределена по показательному закону, напишите формулу плотности вероятности гипотетического закона распределения и найдите вероятности попадания случайной величины в каждый из интервалов.

5) Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ по критериям Пирсона и Колмогорова, проверьте степень согласия теоретического и эмпирического распределений.

Таблица 132 – **Результаты испытания ламп**

50	180	220	800	280	343	921	1 205	53	1 930
2 540	320	896	1 374	15	570	0	1 765	84	732
3 345	596	2 500	1 876	940	75	24	601	240	776

14	651	15	731	1 340	1 803	1 560	554	74	1 920
1 207	1 700	740	510	1 000	1 020	1	224	155	68

Решение

1) Составим ряд распределения, разбив изучаемую совокупность на 6 интервалов равной длины.

Отсортируем результаты испытания. Найдем $T_{\min} = 0$ и $T_{\max} = 3\,345$. Размах вариации $R = T_{\max} - T_{\min} = 3\,345$. Разделив размах вариации на 6, получим длину интервала разбиения, равную 557,5. Округлив до целых, имеем 600. В итоге получаем 6 интервалов. Подсчитаем, сколько вариантов попадает в каждый интервал, и занесем полученные данные в таблицу 133.

Таблица 133 – **Ряд распределения**

X	m_i	$\frac{m_i}{n}$
0–600	24	0,48
600–1 200	12	0,24
1 200–1 800	7	0,14
1 800–2 400	4	0,08
2 400–3 000	2	0,04
Более 3 000	1	0,02

2) Эмпирическую функцию распределения $F(x)$ можно записать в следующем виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ ïðè } x \le 0; \\ 0{,}48 \text{ ïðè } 0 < x \le 600; \\ 0{,}72 \text{ ïðè } 600 < x \le 1\,200; \\ 0{,}86 \text{ ïðè } 1\,200 < x \le 1800; \\ 0{,}94 \text{ ïðè } 1800 < x \le 2\,400; \\ 0{,}98 \text{ ïðè } 2\,400 < x \le 3\,000; \\ 1 \text{ ïðè } x > 3\,000. \end{cases}$$

Эта функция представлена на рисунке 18.

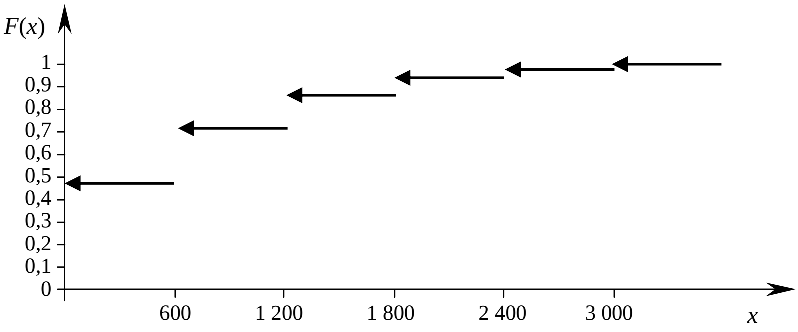

Рисунок 18 – **График функции $F(x)$**

3) Из данных таблицы 133 определим среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение полученного интервального вариационного ряда по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i;$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2.$$

Промежуточные вычисления занесем в таблицу 134.

Таблица 134 – **Промежуточные данные**

Интервалы значений (X)	Середина интервалов (x_i)	Частоты (m_i)	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$
0–600	300	24	7 200	2 160 000
600–1 200	900	12	10 800	9 720 000
1 200–1 800	1 500	7	10 500	15 750 000
1 800–2 400	2 100	4	8 400	17 640 000
2 400–3 000	2 700	2	5 400	14 580 000
Более 3 000	3 300	1	3 300	10 890 000
Σ	–	50	45 600	70 740 000

Подставляя результаты расчетов в формулы, получим:

$$\bar{x} = \frac{45\,600}{50} = 912;$$

$$\overline{x^2} = \frac{70\,740\,000}{50} = 1\,414\,800;$$

$$\sigma^2 = 1\,414\,800 - (912)^2 = 583\,056;$$

$$\sigma = 763{,}581.$$

4) По условию предполагается, что случайная величина распределена по показательному закону. Тогда $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, где $\lambda = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{912} =$ $= 0{,}001$.

Плотность вероятности рассматриваемой величины запишем в следующем виде:

$$f(x) = 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x}.$$

Найдем теоретические вероятности (P_i) для каждого интервала, которые выражают вероятности попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x} dx = -e^{-0{,}001x_i} + e^{-0{,}001x_{i-1}};$$

$$P_1 = e^0 - e^{-0{,}001 \cdot 600} = 1 - e^{-0{,}6} = 1 - 0{,}548\,812 = 0{,}451\,188;$$

$$P_2 = e^{-0{,}001 \cdot 600} - e^{-0{,}001 \cdot 1\,200} = e^{-0{,}6} - e^{-1{,}2} = 0{,}548\,812 - 0{,}301\,194 = 0{,}247\,617;$$

$$P_3 = e^{-0{,}001 \cdot 1\,200} - e^{-0{,}001 \cdot 1\,800} = e^{-1{,}2} - e^{-1{,}8} = 0{,}301\,194 - 0{,}165\,299 = 0{,}135\,895;$$

$$P_4 = e^{-0{,}001 \cdot 1\,800} - e^{-0{,}001 \cdot 2\,400} = e^{-1{,}8} - e^{-2{,}4} = 0{,}165\,299 - 0{,}090\,718 = 0{,}074\,581;$$

$$P_5 = e^{-0{,}001 \cdot 2\,400} - e^{-0{,}001 \cdot 3\,000} = e^{-2{,}4} - e^{-3} = 0{,}090\,718 - 0{,}049\,787 = 0{,}040\,931;$$

$$P_6 = e^{-0{,}001 \cdot 3\,000} - e^{-\infty} = e^{-3} = 0{,}049\,787 - 0 = 0{,}049\,787.$$

5) Проверим степень согласия теоретического и эмпирического распределений по критерию χ^2 (Пирсона) и критерию Колмогорова. Сведем все вычисления в таблицу 135.

Таблица 135 – **Расчетные данные**

Интервалы значений случайной величины (X)	Эмпирические частостности $\left(\frac{m_i}{n}\right)$	Теоретические вероятности (P_i)	Эмпирическая функция распределения ($F^*(x)$)	Теоретическая функция распределения ($F(x)$)	$\lvert F^*(x) - F(x)\rvert$	Эмпирические частоты (m_i)	Теоретические частоты $\left(m_i' = nP_i\right)$	$\frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}$
0–600	0,48	0,451 188	0,48	0,451 188	0,028 812	24	22,55 942	0,091 992
600–1 200	0,24	0,247 617	0,72	0,698 806	0,021 194	12	12,38 087	0,011 717
1 200–1 800	0,14	0,135 895	0,86	0,834 701	0,025 299	7	6,794 766	0,006 199
1 800–2 400	0,08	0,074 581	0,94	0,909 282	0,030 718	4	3,729 047	0,019 688
2 400–3 000	0,04	0,040 931	0,98	0,950 213	0,029 787	2	2,046 544	0,001 059
Более 3 000	0,02	0,049 787	1	1	0	1	2,489 353	0,891 064
Σ	1	1	–	–	–	50	50	1,021 717

По критерию Колмогорова находим:

$$\max \lvert F^*(x) - F(x)\rvert = 0{,}030\ 718\ .$$

Вычислим наблюдаемое значение выборочной статистики $\lambda_{\text{íàáë}} = D_n\sqrt{n} = 0{,}030718\cdot\sqrt{50} = 0{,}2172$. Из таблицы квантилей распределения Колмогорова по заданной вероятности $\alpha = 0{,}05$ находим критическое значение $\lambda_{0,05} = 1{,}358$. Так как $\lambda_{набл} = 0{,}2\ 172 < 1{,}358$, то нет оснований для отклонений нулевой гипотезы о показательном распределении T горения электролампочки.

По критерию Пирсона находим величину:

$$\chi^2_{\text{íàáë}} = \sum_{m=1}^{6}\frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} = 1{,}021717\,.$$

По таблице квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = k - 2 - 1 = 6 - 3 = 3$ найдем критическое значение $\chi^2_{\text{êð}}(0{,}05;3) = 11{,}0705$. Так как $\chi^2_{\text{íàáë}} = 1{,}021717 < 11{,}0705$, то нет оснований отвергать гипотезу о показательном распределении случайной величины X.

Задача 2. В течение шести лет использовались 5 различных технологий по выращиванию сельскохозяйственной культуры. Установите влияние различных технологий на урожайность культуры. Данные наблюдений в центнерах на 1 га приведены в таблице 136.

Таблица 136 – **Данные наблюдений**

Год	Технология (фактор A)				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1-й	1,2	0,6	0,9	1,7	1,0
2-й	1,1	1,1	0,6	1,4	1,4
3-й	1,0	0,8	0,8	1,3	1,3
4-й	1,3	0,7	1,0	1,5	0,9
5-й	1,1	0,7	1,0	1,2	1,2
6-й	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5

Решение

$S^2_{\text{îñò}}$ и S^2_A найдем, используя следующие формулы:

$$\overline{x_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\ ;\ \bar{x} = \frac{1}{m\cdot n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\overline{x_j}\ ;$$

$$S^2_A = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{x_j} - \bar{x}\right)^2 \cdot n}{m-1}\ ;\ S^2_{\text{îñò}} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x_j}\right)^2}{m(n-1)}\ .$$

где n – количество лет наблюдений;

m – число уровней фактора A;

i – номер строки;

j – номер столбца.

Для данного примера n = 6, m = 5. Полученные данные занесем в таблицу 137.

Таблица 137 – **Расчетные данные**

Значение	Технология (фактор A)					Сумма
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
$\overline{x_j}$	1,083	0,8	0,9	1,4	1,183	
$\overline{x_j} - \overline{x}$	0,01	–0,2 733	–0,1 733	0,3 267	0,11	
$(\overline{x_j} - \overline{x})^2$	0,0 001	0,0 747	0,03	0,1 067	0,0 121	0,2 236
$(x_{1j} - \overline{x_j})^2$	0,0 136	0,04	0	0,09	–0,1 833	
$(x_{2j} - \overline{x_j})^2$	0,0 003	0,09	0,09	0	0,2 167	
$(x_{3j} - \overline{x_j})^2$	0,0 069	0	0,01	0,01	–0,0 833	
$(x_{4j} - \overline{x_j})^2$	0,0 469	0,01	0,01	0,01	–0,2 833	
$(x_{5j} - \overline{x_j})^2$	0,0 003	0,01	0,01	0,04	0,0 167	
$(x_{6j} - \overline{x_j})^2$	0,0 803	0,01	0,04	0,01	0,3 167	
$\sum_{i=1}^{6}(x_{ij} - \overline{x_j})^2$	0,1 483	0,16	0,16	0,16	0	0,6 283

В результате вычислений получаем:

$$S^2_{\hat{\imath}\tilde{n}\grave{o}} = \frac{0{,}6\,283}{5\cdot(6-1)} = 0{,}0\,251; \quad S^2_{\grave{A}} = \frac{0{,}2\,236}{5} = 0{,}3\,355.$$

Сравним выборочные дисперсии по критерию Фишера:

$$F_{\acute{\imath}\grave{a}\acute{a}\ddot{e}} = \frac{S^2_A}{S^2_{\hat{\imath}\tilde{n}\grave{o}}} = \frac{0{,}3\,355}{0{,}0\,251} = 13{,}36.$$

Задавая уровень значимости критерия $\alpha = 0{,}05$ по таблице Фишера, находим $F_{кр} = F(\alpha;\ m-1;\ mn-m) = F(0{,}05;\ 4;\ 25) = 2{,}76$. Так как значение $F_{набл} = 13{,}36 > F_{кр} = 2{,}76$, то различие технологий значимо.

Задача 3. Выполните следующее:

1) По заданной корреляционной таблице (таблица 138) определите числовые характеристики $\overline{x}, \overline{y}, \sigma_x, \sigma_y$, условные средние $\overline{y}_x$ и $\overline{x}_y$, коэффициенты корреляции и детерминации.

2) Постройте корреляционное поле. По характеру точек на корреляционном поле подберите общий вид функции регрессии.

3) Определите параметры эмпирической линейной функции регрессии Y на X и X на Y и постройте ее график.

4) При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте адекватность линейной регрессии по исходным данным.

Таблица 138 – **Корреляционная таблица**

Y	X					
	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6				10
26		8	10			18
36			32	3	9	44
46			4	12	6	22
56				1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	100

Решение

1) Можно значительно упростить расчет, если перейти к условным вариантам. Выберем в качестве ложных нулей $C_1 = 30$, $C_2 = 36$ (каждая из этих вариант расположена в середине соответствующего вариационного ряда). Шаг h равен разности между двумя соседними вариантами соответствующего вариационного ряда: $h_1 = 25 - 20$, $h_2 = 26 - 16$. Тогда

$$u_1 = \frac{20-30}{5}; \quad u_2 = \frac{25-30}{5}; \quad u_3 = \frac{30-30}{5}; \quad u_4 = \frac{35-30}{5}; \quad u_5 = \frac{40-30}{5};$$

$$v_1 = \frac{16-36}{10}; \quad v_2 = \frac{26-36}{10}; \quad v_3 = \frac{36-36}{10}; \quad v_4 = \frac{46-36}{10}; \quad v_5 = \frac{56-36}{10}.$$

Составим корреляционную таблицу в условных вариантах. Практически это делают так: в первом столбце вместо ложного нуля C_2 (варианты 36) ставят 0; над нулем последовательно записывают –1, –2; под нулем записывают 1, 2. В первой строке вместо ложного нуля C_1 (варианты 30) ставят 0; слева от нуля последовательно записывают –1, –2; справа от нуля пишут 1, 2. Все остальные данные переписывают из первоначальной корреляционной таблицы.

В итоге получим корреляционную таблицу в условных вариантах (таблица 139).

Таблица 139 – **Корреляционная таблица в условных вариантах**

v	u					
	–2	–1	0	1	2	n_v
–2	4	6				10
–1		8	10			18
0			32	3	9	44
1			4	12	6	22
2				1	5	6
n_u	4	14	46	16	20	100

Найдем выборочные средние условных вариант $\bar{u}$ и $\bar{v}$:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n} = \frac{4(-2)+14(-1)+46\cdot 0+16\cdot 1+20\cdot 2}{100} = 0{,}34;$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_v v}{n} = \frac{10(-2)+18(-1)+44\cdot 0+22\cdot 1+6\cdot 2}{100} = -0{,}04.$$

Определим вспомогательные величины $\overline{u^2}$ и $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2} = \frac{\sum n_u u^2}{n} = \frac{4\cdot 4+14\cdot 1+46\cdot 0+16\cdot 1+20\cdot 4}{100} = 1{,}26;$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum n_v v^2}{n} = \frac{10\cdot 4+18\cdot 1+44\cdot 0+22\cdot 1+6\cdot 4}{100} = 1{,}04.$$

Найдем средние квадратические отклонения условных вариант $\overline{\sigma_u}$ и $\overline{\sigma_v}$:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1{,}26 - (0{,}34)^2} \approx 1{,}07;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2} = \sqrt{1{,}04 - (0{,}04)^2} \approx 1{,}02.$$

Вычислим $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h_1 + C_1 = 0{,}34 \cdot 5 + 30 = 31{,}7\,;$$
$$\overline{y} = \overline{v} \cdot h_2 + C_2 = -0{,}04 \cdot 10 + 36 = 35{,}6\,.$$

Найдем $\overline{\sigma_x}$ и $\overline{\sigma_y}$:

$$\overline{\sigma_x} = h_1 \cdot \sigma_u = 5 \cdot 1{,}07 = 5{,}35;$$
$$\overline{\sigma_y} = h_2 \cdot \sigma_v = 10 \cdot 1{,}02 = 10{,}2\,.$$

Определим условные средние $\overline{y_x}$ и $\overline{x_y}$:

$$\overline{y_{x=20}} = 16;$$

$$\overline{y}_{x=25} = \frac{16 \cdot 6 + 26 \cdot 8}{14} = 21{,}71;$$

$$\overline{y}_{x=30} = \frac{10 \cdot 26 + 36 \cdot 32 + 46 \cdot 4}{46} = 34{,}7\,;$$

$$\overline{y}_{x=35} = \frac{36 \cdot 3 + 46 \cdot 12 + 56 \cdot 1}{16} = 44{,}75;$$

$$\overline{y}_{x=40} = \frac{36 \cdot 9 + 46 \cdot 6 + 56 \cdot 5}{20} = 44;$$

$$\overline{x}_{y=16} = \frac{4 \cdot 20 + 6 \cdot 25}{10} = 23;$$

$$\overline{x}_{y=26} = \frac{25 \cdot 8 + 30 \cdot 10}{18} = 27{,}78;$$

$$\overline{x}_{y=36} = \frac{32 \cdot 30 + 3 \cdot 35 + 9 \cdot 40}{44} = 32{,}39;$$

$$\overline{x}_{y=46} = \frac{4 \cdot 30 + 12 \cdot 35 + 6 \cdot 40}{22} = 35{,}45\,;$$

$$\bar{x}_{y=56} = \frac{1 \cdot 56 + 5 \cdot 40}{6} = 42{,}67.$$

Выборочный коэффициент корреляции вычислим по формуле

$$r_{â} = \frac{\sum n_{uv} - n\bar{u}\bar{v}}{n\bar{\sigma}_u \bar{\sigma}_v}.$$

Для вычисления суммы $\sum n_{uv}uv$ составим расчетную таблицу следующим образом:

В каждой клетке таблицы, в которой частота $n_{uv} \neq 0$, запишем в правом верхнем углу произведение $n_{uv}u$. Например, в правых верхних углах клеток первой строки записаны произведения: $4(-2) = -8$; $6(-1) = -6$ (таблица 140).

Сложим все числа, помещенные в правых верхних углах клеток одной строки, и их сумму запишем в клетку этой же строки столбца U. Например, для первой строки $U = -8 + (-6) = -14$.

Умножим варианту v на U и полученное произведение запишем в последнюю клетку той же строки, т. е. в клетку столбца vU. Например, в первой строке таблицы $v = -2$, $U = -14$, следовательно, $vU =$ $= (-2)\cdot(-14) = 28$.

Сложив все числа столбца vU, получим сумму $\sum_v vU$, которая равна искомой сумме $\sum n_{uv}uv$. Например, $\sum_v vU = 82$, следовательно, искомая сумма $\sum n_{uv}uv = 82$.

Для контроля расчета аналогичные вычисления произведем по столбцам: произведения $n_{uv}v$ запишем в левый нижний угол клетки, содержащей частоту $n_{uv} \neq 0$. Все числа, помещенные в левых нижних углах клеток одного столбца, сложим, и их сумму запишем в строку V. Далее умножим каждую варианту u на V и результат запишем в клетках последней строки. Наконец, сложив все числа последней строки, получим сумму $\sum_u uV$, которая также равна искомой сумме $\sum n_{uv}uv$. Например, $\sum_u uV = 82$, следовательно, $\sum n_{uv}uv = 82$.

Полученные результаты поместим в таблицу.

Таблица 140 – **Расчетная таблица**

v	*u*						
	–2	–1	0	1	2	*U*	*vU*
–2	–8 4 –8	–6 6 –12				–14	28
–1		–8 8 –8	0 10 –10			–8	8
0			0 32 0	3 3 0	18 9 0	21	0
1			0 4 4	12 12 12	12 6 6	24	24
2				1 1 2	10 5 10	11	22
V	–8	–20	–6	14	16		82
Vu	16	20	0	14	32	82	

Найдем искомый выборочный коэффициент корреляции:

$$r_{\hat{a}} = \frac{82 - 100 \cdot 0{,}34(-0{,}04)}{100 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}02} = 0{,}76.$$

Коэффициент детерминации равен: $d = r_{\hat{a}}^2 = 0{,}58$.

2) Корреляционное поле строим по данным корреляционной таблицы 138.

По рисунку 19 определяем общий вид уравнения регрессии $y = ax + b$.

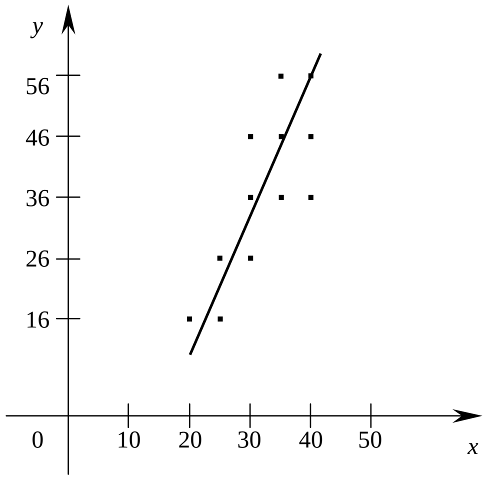

Рисунок 19 – **Корреляционное поле**

3) Найдем параметры уравнений регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{\hat{a}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x});$$

$$\overline{y}_x - 35{,}5 = 0{,}76 \frac{10{,}2}{5{,}35}(x - 31{,}7);$$

$$\overline{y}_x = 1{,}45x - 10{,}36;$$

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_{\hat{a}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y});$$

$$\overline{x}_y - 31{,}7 = 0{,}76 \frac{5{,}35}{10{,}2}(y - 35{,}6);$$

$$\overline{x}_y = 0{,}4y + 17{,}51.$$

Построим графики функций $\overline{y}_x$ и $\overline{x}_y$ (рисунок 20).

Ппри $x = 0$, $\overline{y}_x = -10{,}36$; при $x = 31{,}7$, $\overline{y}_x = 35{,}6$.

При $y = 0$, $\overline{x}_y = 17{,}51$; при $y = 35{,}6$, $\overline{x}_y = 31{,}7$.

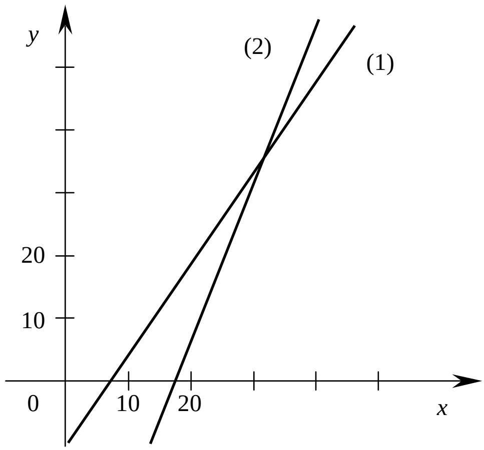

Рисунок 20 – **Графики функций** $\overline{y}_x$ **и** $\overline{x}_y$

4) Проверим адекватность линейной регрессии при $\alpha = 0{,}05$ путем следующих вычислений:

$$T_{\text{íàáë}} = \frac{r_{\text{â}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{â}}^2}} = \frac{0{,}76\sqrt{98}}{\sqrt{1-0{,}76^2}} = 15{,}35.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = n - 2 = 100 - 2 = 98$ находим критическую точку двухсторонней критической области $t_{кр}$ (0,05; 98) = 1,99. Так как $T_{набл} < t_{кр}$, то коэффициент корреляции значимо отличен от нуля. Следовательно, X и Y коррелированны, т. е. связаны линейной зависимостью.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Вентцель, Е. С. Теория вероятностей (задачи и упражнения) : учеб. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1969. – 576 с.

Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 478 с.

Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 408 с.

Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей : учеб. / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1988. – 448 с.

Гурский, Е. И. Методическое пособие по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский, Т. Ю. Скобля, В. Э. Юшкевич. – Минск, 1973.

Гусак, А. А. Высшая математика : учеб. пособие : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 2. – 488 с.

Ивашев-Мусатов, О. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / О. С. Ивашев-Мусатов. – М. : Наука, 1979. – 256 с.

Карасев, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. / А. И. Карасев. – М. : Статистика, 1979. – 280 с.

Кастрица, О. А. Высшая математика для экономистов : учеб. / О. А. Кастрица. – Минск : Новое знание, 2006. – 491 с.

Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. А. Колемаев, О. В. Староверов, В. Б. Турундаевский. – М. : Высш. шк., 1991. – 302 с.

Красс, М. С. Математика для экономических специальностей : учеб. / М. С. Красс. – М. : Дело, 2002. – 704 с.

Лихолетов, И. И. Руководство к решению задач по высшей математике с основами математической статистики и теории вероятностей : учеб. пособие / И. И. Лихолетов, И. П. Мацкевич. – Минск : Высш. шк., 1969. – 430 с.

Микулик, Н. А. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике : справ. пособие / Н. А. Микулик, Г. Н. Рейзина. – Минск : Высш. шк., 1991. – 164 с.

Сборник задач по высшей математике для экономистов : практикум / В. И. Ермаков [и др.] ; под ред. В. И. Ермакова. – М. : Инфра-М, 2001. – 424 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Таблица значений функции плотности стандартного нормального распределения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	39803	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Окончание

x	Сотые доли *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции Лапласа $\hat{O}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319

Окончание

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,4999997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961		
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие
для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени

Авторы-составители:
Воробей Людмила Александровна
Косенок Николай Сергеевич
Кравченко Светлана Витальевна и др.

Редактор Е. В. Седро
Компьютерная верстка Л. Ф. Барановская

Подписано в печать 12.07.16. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Бумага типографская № 1. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 10,0. Уч.-изд. л. 10,7. Тираж 201 экз.
Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/138 от 08.01.2014.
Просп. Октября, 50, 246029, Гомель.
http://www.i-bteu.by

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра информационно-вычислительных систем

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие
для реализации содержания образовательных программ
высшего образования I ступени

Гомель 2016